

# О СТРУКТУРЕ КРИВЫХ ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМАХ, ДЕМОНИСТРИРУЮЩИХ АТТРАКТОРЫ ШИЛЬНИКОВА<sup>1\*</sup>

*Т.К. Бурдыгина, А.А. Бобровский, С.М. Малых*

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

Настоящая работа посвящена исследованию бифуркационных кривых, отвечающих возникновению шильниковской петли седло-фокусных положений равновесия в системах Ресслера и Арнедо, Калле, Трессе.

*Ключевые слова:* бифуркационный анализ, аттрактор Шильникова, численный анализ.

В работе рассматриваются система Ресслера [1, 2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = bx + z(x - c) \end{cases} \quad (1)$$

и система Арнедо, Калле, Трессе [3]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y - \beta z + \mu x(1 - x) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $x$ ,  $y$  и  $z$  – фазовые переменные,  $a$ ,  $c$ ,  $\beta$  и  $\mu$  – параметры систем.

Приведенные системы являются одними из основных простейших и известных моделей, демонстрирующих аттрактор Шильникова [4]. Напомним, что под аттракторами Шильникова понимаются такие гомоклинические аттракторы, которые содержат седло-фокусное состояние равновесия с двумерным неустойчивым многообразием.

В частности, изучается бифуркационное множество гомоклинических петель седло-фокусного положения равновесия. Рассматриваются как однообходные (основные), так и многообходные (вторичные) гомоклинические траектории. Многообходные гомоклинические траектории располагаются между ветками однообходных.

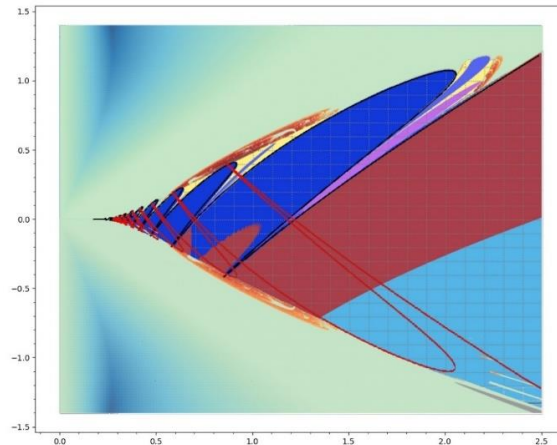
Один из основных результатов работы – визуализация поведения динамических систем на примере систем Ресслера и Арнедо, Калле, Трессе (см. Рис. 1 и Рис. 2).

На рис 1. показаны две кривые для однообходных гомоклинических траекторий. Красная кривая для состояния равновесия  $(1,0,0)$ , на основе которого образуется аттрактор, а черная – для  $(0,0,0)$ . Кроме того, на ней представлены карты старшего ляпуновского показателя и карта нидингов. Черного кривая и карта старшего ляпуновского показателя в верхней части построены в прямом времени, а нижняя карта и красная кривая построены для системы в обратном времени. На карте старшего ляпуновского показателя синим цветом отмечены параметры системы, при которых старший показатель Ляпунова отрицательный (причем чем темнее синяя область, тем он меньше), а красным цветом – положительный. Серым цветом отмечены точки, при которых траектории уходят на бесконечность. Карты нидингов применяются для определения динамики неустойчивой сепаратрисы состояния равновесия системы типа седло-фокус. Нидинг – последовательности записываются в алфавите  $\{0,1\}$ . Далее берется точка на сепаратрисе близко к особой точке, и определяются правило, по которому записывается последовательность. Таким образом, каждая область карты соответствует определенной нидинг-последовательности.

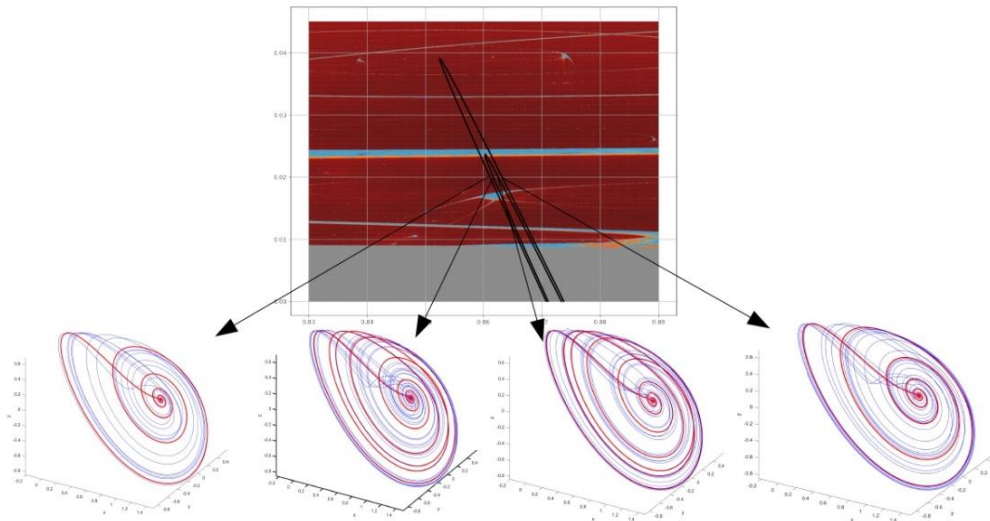
На рис 2. изображен увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы для системы (2) в параметрах  $(\mu, \beta_{\text{new}})$ , где  $\beta_{\text{new}}$  и  $\beta$  связаны соотношением  $\beta = \beta_{\text{new}} + 0.7\mu - 0.22$ . На диаграмме изображен фрагмент области параметров, где красная кривая попадает в область существования ат-

<sup>1\*</sup> Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931.

трактора Шильникова (старший ляпуновский показатель положительный). Нижняя кривая соответствует многообходным траекториям. Кроме того, представлены фазовые портреты аттрактора с гомоклинической петлей для различных наборов параметров.



**Рис 1.** Бифуркационная диаграмма для системы Арнеодо, Калле, Трессе с двумя кривыми, соответствующими однообходным гомоклиническим траекториям для состояний равновесия  $(1,0,0)$  и  $(0,0,0)$ .



**Рис 2.** Фрагменты бифуркационных кривых системы Арнеодо, Калле, Трессе, соответствующие различным гомоклиническим траекториям.

## Литература

1. O.E. Rössler, "An equation for continuous chaos," *Physics Letters A* 57, 397–398 (1976).
2. O. Rossler, "An equation for hyperchaos," *Physics Letters A* 71, 155–157 (1979).
3. A. Arneodo, P. Coullet, and C. Tresser, "Oscillators with chaotic behavior: an illustration of a theorem by Shilnikov," *Journal of Statistical Physics* 27, 171–182 (1982).
4. L.P. Shilnikov, "Bifurcation theory and turbulence," *Methods of the Qualitative Theory of Differential Equations*, 150–163 (1986).