Дж. А. Джейли
Ф. Дж. Рени

МИКРОЭКОНОМИКА

Продвинутый уровень

Учебник

*Перевод с английского под научной редакцией
В.П. Бусыгина, М.И. Левина, Е.В. Покатович*

Издательский дом
Государственного университета — Высшей школы экономики

Москва, 2011

Дж.А. Джейли
Ф.Дж. Рени

МИКРОЭКОНОМИКА

Geoffrey A. Jehle
Vassar College

Philip J. Reny
University of Chicago

ADVANCED MICROECONOMIC THEORY

Second edition

УДК 330.101.542
ББК 65.012.1
Д40

Подготовлено при содействии НФПК —
Национального фонда подготовки кадров в рамках
программы «Совершенствование преподавания
социально-экономических дисциплин в вузах»

Перевод с английского:

Е.В. Покатович (предисловие, гл. 1, 2, 3, 5), *Е.И. Фатеева* (гл. 4, 8),
Г.Г. Покатович (гл. 6, 9), *Е.А. Левина* (гл. 7), *К.А. Букин* (гл. А1, А2)

Научные редакторы
В.П. Бусыгин, *М.И. Левин*, *Е.В. Покатович*

Authorized translation from the English language edition, entitled
ADVANCED MICROECONOMIC THEORY, 2nd Edition, ISBN 0321079167,
by Jehle, Geoffrey A. and Reny, Philip J., published by Pearson Education, Inc.
publishing as Addison-Wesley.

Russian language edition published by the University — Higher School of Economics.

Авторизованный перевод с английского языка книги
Джеффри А. Джейли и Филипа Дж. Рени «Микроэкономика: продвинутый уровень», 2-е изд.,
ISBN 0321079167, изданной Pearson Education, Inc. и опубликованной Addison-Wesley.

ISBN 0-321-07916-7 (англ.)
ISBN 978-5-7598-0362-1 (рус.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II. Рынки и благосостояние

Часть III. Стратегическое поведение

Математическое приложение

Посвящается
Ране и Камрану (B.A.J.);
Диане, Лизе и Элизабет (P.T.R.)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В каждой главе нового издания книги нашей целью остается изложение современного ядра микроэкономической науки. Мы по-прежнему полагаем, что такой подход позволяет внимательному читателю добиться глубокого понимания оснований современной микроэкономики и увидеть взаимосвязи между ними. Мы благодарны многочисленному отряду студентов и коллег, которые поддерживают нас в этом.

В конце каждой главы есть упражнения, и проработка максимально возможного числа из них является самым надежным способом освоения материала. Подсказки и ответы к некоторым упражнениям приведены в конце книги вместе со списками теорем и определений, встречающихся в тексте. Мы также планируем вести форум в Интернете, где читатели смогут обмениваться решениями задач из книги (адрес форума: http://alfred.vassar.edu).

При подготовке второго издания мы воспользовались возможностью внести одно крупное структурное изменение. Поскольку все больше студентов поступают на магистерские программы, имея хорошую математическую подготовку, мы решили, что необходимую чистую математику можно вынести в приложение. Таким образом, она по-прежнему будет доступна тем, кому нужно освежить знания или восполнить пробелы в подготовке, но не станет помехой преподавателям, которые чувствуют, что их студенты достаточно подготовлены, чтобы погрузиться в микроэкономическую теорию. Две полноценные главы математического приложения по-прежнему содержат подробное и практически самостоятельное изложение теории множеств, элементов математического анализа, топологии и современной теории оптимизации, которые являются неотъемлемыми частями современной микроэкономики. Изложение ведется формально, но не требует особых предварительных знаний помимо сведений из теории функций одной переменной и простой линейной алгебры. Даже студентам с очень хорошей математической подготовкой мы рекомендуем вначале просмотреть обе главы приложения. Тогда, если потребуется что-то уточнить или повторить, читатель будет знать, как организован этот материал.

Основная структура остального текста не изменилась.

Часть I посвящена современной теории поведения потребителя и производителя. Вначале мы рассматриваем теорию поведения потребителя, причем довольно подробно — по причине ее важности как таковой, а также потому, что ее методы и результаты применяются во многих других областях микроэкономики. Далее следует теория поведения производителя, и мы обращаем внимание на формальное сходство между многими элементами этих важных разделов современной микроэкономики.

В части II мы изучаем поведение экономических агентов, когда они взаимодействуют на рынках. Мы дадим исчерпывающую характеристику неоклассических моделей конкурентных и неконкурентных рыночных структур и в общих чертах покажем взаимосвязь структуры рынка, рыночного равновесия и экономической эффективности. Затем последует теория общего равновесия, в которой некоторые из этих вопросов рассматриваются на уровне экономической системы в целом. Глава об общественном выборе и благосостоянии представляет собой доступное введение в нормативный анализ.

Предметом части III является стратегическое поведение. Объемная глава по теории игр содержит тщательное и подробное описание игр в стратегической и развернутой форме. Далее идет глава по экономике информации, где мы применяем теоретико-игровой подход к этой актуальной области. В заключительной главе дается детальное изложение современной теории аукционов, которая находится на переднем крае сегодняшних теоретических исследований.

По счастью, мы получили целый ряд полезных предложений от многих внимательных читателей предыдущего издания. Большинство из них (как и все указания на ошибки) учтены в настоящем издании. Текст стал сильнее благодаря добровольной помощи коллег, друзей и студентов. Всем им мы искренне признательны.

Часть I

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ АГЕНТЫ

Глава 1
ТЕОРИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

1.1. Базовые понятия

В первых двух главах этой книги мы рассмотрим основные положения современной теории потребителя — фундамента, на котором построены многочисленные теоретико-экономические структуры. Позднее, изучая экономику, вы начнете понимать, какую огромную роль эта теория играет в образе мышления экономистов. Ее эхо будет не раз слышаться практически в любых разделах экономической науки — в их возникновении, структуре и приложениях.

Прежде чем переходить к самой теории, нельзя не упомянуть о роли в ней математики. Вы заметите, что некоторые предположения в тексте делаются исключительно ради математической целесообразности. Тому есть простое объяснение, и в любой другой науке оно точно такое же: абстрагирование от «реальности» открывает нам доступ к мощным математическим методам, которые благодаря своей строгости помогают заглянуть дальше, чем позволяют интуиция и опыт. В физическом мире «не бывает» плоскостей без трения или абсолютного вакуума, но в экономике, как и в физике, возможность подобных предположений позволяет сконцентрироваться на более важных аспектах проблемы и с помощью этого создать теоретические ориентиры для того, чтобы соотносить с ними опыт и наблюдения реального мира. Это ничуть не означает, что нужно без сомнений принимать любое нереалистичное или чисто формальное теоретическое положение. Если оно возникает, то на него *всегда* стоит бросить критический взгляд и выяснить, что дает и чего требует такая абстракция. Понимание этих вопросов и размышления над ними и составляют тот материал, благодаря которому происходит развитие теоретических знаний. Далее, однако, мы будем воспринимать и стремиться понять теорию «как есть», оставляя большинство критических оценок за рамками этой книги.

В любой модели потребительского выбора имеются четыре основных элемента: это потребительское множество, допустимое множество, отношение предпочтения и поведенческая предпосылка. Они концептуально отличны друг от друга, хотя даже экономисты нередко упускают это из вида. Такая базовая структура является очень общей и поэтому крайне гибкой. Специфицируя каждый из этих элементов для соответствующих задач, можно формально описать и проанализировать множество ситуаций, связанных с выбором. Хотя далее мы будем заниматься преимущественно конкретными формализациями, которые доминируют во взглядах экономистов на поведение отдельного потребителя, хорошо бы иметь в виду, что «теория потребителя» как таковая — это фактически очень богатая и гибкая *теория выбора.*

Понятие ***потребительского множества*** вводится очевидным образом: потребительское множество X представляет собой множество всех альтернатив, или вполне специфицированных потребительских планов, которые потребитель способен вообразить, независимо от того, можно ли их реализовать. Таким образом мы хотим отразить множество всевозможных альтернатив без учета ограничений реального мира. Потребительское множество иногда еще называют ***множеством выбора***.

Пусть каждый товар измеряется в бесконечно делимых единицах. Пусть $x_i \in \mathbb{R}$ представляет число единиц *i*-го товара. Мы предполагаем, что имеет смысл только неотрицательное количество единиц товара и что всегда можно представить себе возможность *отсутствия* любого товара. Далее предположим, что имеется конечное, фиксированное, но произвольное число n различных товаров. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ является вектором, содержащим соответствующие количества каждого из n товаров. Назовем $\mathbf{x}$ ***потребительским набором***, или ***потребительским планом***. Потребительский набор $\mathbf{x} \in X$, таким образом, представлен точкой $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$. Обычно мы в целях упрощения будем представлять потребительское множество как *весь* неотрицательный ортант, $X = \mathbb{R}^n_+$. Легко видеть, что в этом случае выполнено каждое из следующих основных требований.

Предположение 1.1. Свойства потребительского множества X.
Минимальные условия на потребительское множество:
1) $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}^n_+$;
2) X *замкнуто*;
3) X *выпукло*;
4) $\mathbf{0} \in X$.

Понятие ***допустимого множества*** также интуитивно понятно. Пусть B — множество таких потребительских планов, которые не только можно себе вообразить, но и которые, что важнее, являются реально *достижимыми* при тех экономических условиях, с которыми сталкивается потребитель. Допустимое множество B, таким образом, является подмножеством потребительского множества X, состоящим из тех потребительских планов, которые остаются после того, как мы приняли во внимание все ограничения на доступ потребителя к благам, возникающие как следствие практических, институциональных или экономических реалий окружающего мира. Спецификация этих реалий в той или иной ситуации определяет конкретный вид и дополнительные свойства, которыми будет обладать множество B. Пока мы ограничимся утверждением, что $B \subset X$.

Отношение предпочтения обычно отражает ограничения (если они есть) восприятия потребителя в ситуациях, связанных с выбором, противоречивость или непротиворечивость его выбора и информацию о его вкусах по отношению к различным объектам выбора. Отношение предпочтения играет ключевую роль в любой теории выбора. Его особый вид в теории потребительского поведения заслуживает отдельного изучения.

Наконец, модель «замыкается» путем введения некоторой ***поведенческой предпосылки***. Она выражает основной принцип, которому потребитель следует при выборе, и определяет основную цель такого выбора. Предполагается, что *потребитель стремится найти и выбрать ту из доступных ему альтернатив, которая является наиболее предпочтительной с точки зрения его личных вкусов.*

1.2. Предпочтения и полезность

В данном разделе мы рассмотрим отношение предпочтения потребителя и исследуем его связь с современным пониманием термина «полезность». Однако прежде скажем несколько слов о развитии экономической мысли, которые помогут поместить дальнейшее изложение в правильный контекст.

Так называемый закон спроса поначалу строился на некоторых крайне сильных предположениях. В классической теории Эджворта, Милля и других сторонников утилитаристского направления в философии «полезность» считалась некоей субстанцией, а «удовольствие» и «страдание» различных индивидов — четко определенными явлениями, которые можно измерять и сравнивать. Помимо этого, «принцип убывающей предельной полезности» принимался в качестве психологического «закона», а ранние формулировки закона спроса существенным образом на него опирались. Все это представляло собой исключительно сильные предположения о внутреннем мире человека.

Дальнейшая история теории потребителя была отмечена настойчивыми усилиями сделать ее основания как можно более общими. Экономисты стремились исключить максимальное количество традиционных допущений, явных или неявных, и при этом сохранить логически последовательную теорию, обладающую прогностической способностью. Парето [Pareto, 1896], по-видимому, первым заподозрил, что предположение об измеримости «полезности» несущественно для теории спроса. Слуцкий [Slutsky, 1915] провел первое систематическое исследование теории спроса без использования понятия измеримой субстанции под названием «полезность». Хикс [Hicks, 1939] продемонстрировал, что принцип убывающей предельной полезности не является ни необходимым, ни достаточным условием для того, чтобы выполнялся закон спроса. Наконец, Дебре [Debreu, 1959] завершил сведение стандартной теории потребителя к тем основам, которые мы здесь рассмотрим. Сегодняшняя теория тесно связана со своими предшественницами, но является более стройной, более строгой и более общей.

1.2.1. Отношение предпочтения

Предпочтения потребителя характеризуются *аксиоматически.* При таком способе моделирования, для того чтобы охарактеризовать структуру и свойства предпочтений, принимается минимально необходимое число явных аксиом. Остальная теория и выводы о поведении агентов логически следуют из этих аксиом.

Аксиомы потребительского выбора математически выражают фундаментальные характеристики потребительского поведения и отношения к объектам выбора. Вместе они формализуют точку зрения, согласно которой потребитель *способен* делать выбор и что этот выбор является в известном смысле *непротиворечивым*.

Предпочтения потребителя формально представляются *бинарным отношением* $\succsim$, определенным на потребительском множестве X. В ситуации, когда $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$, мы говорим, что для этого потребителя «$\mathbf{x}^1$ не хуже $\mathbf{x}^2$».

Тот факт, что мы используем бинарное отношение для описания предпочтений, существенен и заслуживает небольшого обсуждения. Он отражает точку зрения, что с самого начала нашей теории требуется относительно немного информации о потребителе. Нам необходимо только, чтобы потребитель делал *попарные* сравнения, т.е. чтобы он каждый раз рассматривал только два потребительских плана и принимал относящееся к ним решение. Следующие аксиомы задают базовые критерии, которым должны соответствовать эти попарные сравнения.

Аксиома 1. Полнота. *Для любых* $\mathbf{x}^1$ *и* $\mathbf{x}^2$ *из* X *либо* $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$, *либо* $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$.

Аксиома 1 формализует идею о том, что потребитель *может* делать сравнения, т.е. что он способен различать и обладает необходимыми знаниями для оценки альтернатив. Аксиома утверждает, что потребитель может сравнить *любые* два потребительских плана $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ и определить, является ли для него $\mathbf{x}^1$ не хуже $\mathbf{x}^2$ или $\mathbf{x}^2$ не хуже $\mathbf{x}^1$.

Аксиома 2. Транзитивность. *Для любых трех элементов* $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ *и* $\mathbf{x}^3$ *из* X *из соотношений* $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ и $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$, *следует* $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$.

Аксиома 2 — особая форма требования *непротиворечивости* потребительского выбора. Хотя по нашему условию потребитель способен каждый раз сравнивать только две альтернативы, предположение о транзитивности требует, чтобы эти сравнения были непротиворечивым образом связаны друг с другом. На первый взгляд такое условие кажется простым и естественным. Действительно, не будь предпочтения транзитивными, наши чувства подсказывали бы нам, что в них есть что-то странное. Тем не менее это, вероятно, наиболее спорная из всех аксиом, описывающих потребительский выбор. Эксперименты показали, что в различных ситуациях выбор реальных людей не всегда удовлетворяет условию транзитивности. Все же мы оставим это условие в нашем описании потребителя, хотя и не без некоторых сомнений.

Из двух этих аксиом следует, что потребитель может полностью *упорядочить* любое конечное число элементов потребительского множества X от наилучшего к наихудшему, причем некоторые элементы могут оказаться эквивалентными друг другу. (Попробуйте доказать это.) Предпочтения, позволяющие потребителю так ранжировать альтернативы, можно представить *отношением предпочтения*.

Определение 1.1. Отношение предпочтения.

Бинарное отношение $\succsim$ *на потребительском множестве* X *называется отношением предпочтения, если оно удовлетворяет аксиомам 1 и 2.*

Существуют два других отношения, которые мы будем использовать для анализа потребительских предпочтений. Они определяются с помощью предпочтения $\succsim$ и формализуют понятия *строгого предпочтения* и *безразличия*.

Определение 1.2. Отношение строгого предпочтения.

Бинарное отношение $\succ$ *на потребительском множестве* X *определяется следующим образом:*

$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ *и неверно, что* $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ (*будем записывать это так:* $\mathbf{x}^2 \not\succsim \mathbf{x}^1$).

Отношение $\succ$ *называется отношением строгого предпочтения, порожденным* $\succsim$, *или просто отношением строгого предпочтения, если ясно, какое отношение имеется в виду. Выражение* $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$ *читается как* «$\mathbf{x}^1$ *строго предпочитается* $\mathbf{x}^2$».

Определение 1.3. Отношение безразличия.

Бинарное отношение $\sim$ *на потребительском множестве* X *определяется следующим образом:*

$\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ *и* $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$.

Отношение $\sim$ называется отношением безразличия, порожденным $\succsim$, или просто отношением безразличия, если ясно, какое отношение имеется в виду. Выражение $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$ читается как «$\mathbf{x}^1$ эквивалентно $\mathbf{x}^2$».

И отношение строгого предпочтения, и отношение безразличия отражают обычный смысл, в котором термины «строгое предпочтение» и «безразличие» используются в повседневной речи. Поскольку они построены на основе отношения предпочтения, можно ожидать, что они должны обладать некоторыми (на самом деле не всеми) его свойствами: для обоих отношений выполняется свойство транзитивности, но не выполняется свойство полноты.

Используя эти два введенных бинарных отношения, мы можем охарактеризовать ранжирование потребителем любых двух альтернатив. Для любой пары $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ имеет место *ровно одна* из трех взаимоисключающих ситуаций[1]: $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^1$ или $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$.

На данный момент мы просто формализовали предположение, что предпочтения отражают способность потребителя делать выбор и характеризуются определенной непротиворечивостью. Рассмотрим, как можно графически описать набор предпочтений, удовлетворяющих только этим аксиомам. Для этого (а также в целях упрощения дальнейшего изложения) определим с помощью отношения предпочтения некоторые связанные с ним множества. Эти множества строятся по одной из имеющихся в потребительском множестве альтернатив и ранжируют относительно нее все остальные альтернативы.

Определение 1.4. Множества в X, основанные на отношении предпочтения.

Пусть $\mathbf{x}^0$ — произвольная точка в потребительском множестве X. По отношению к любой такой точке можно определить следующие подмножества X:

1) $\succsim(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x} \succsim \mathbf{x}^0\}$ *(множество «не хуже чем»).*

2) $\precsim(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}\}$ *(множество «не лучше чем»).*

3) $\prec(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}\}$ *(множество «хуже чем»).*

4) $\succ(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x} \succ \mathbf{x}^0\}$ *(множество «лучше чем»).*

5) $\sim(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x} \sim \mathbf{x}^0\}$ *(множество «безразличия»).*

Гипотетическое множество предпочтений, удовлетворяющих аксиомам 1 и 2, изображено на рис. 1.1 для $X = \mathbb{R}^2_+$. Любая точка такого потре-

---

[1] Понятно, это справедливо в предположении, что $\succsim$ является отношением предпочтения, т.е. полным и транзитивным бинарным отношением. — *Примеч. ред.*

бительского множества, например $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, представляет собой потребительский план, состоящий из некоторого количества x_1^0 товара 1 и некоторого количества x_2^0 товара 2. По аксиоме 1, потребитель может сравнить $\mathbf{x}^0$ с любым другим планом $\mathbf{x}$ в множестве X и решить, является ли $\mathbf{x}$ не хуже, чем $\mathbf{x}^0$, или $\mathbf{x}^0$ не хуже, чем $\mathbf{x}$. Согласно определениям подмножеств и аксиомам 1 и 2, потребитель должен отнести *каждую* точку множества X к одной из трех взаимоисключающих категорий: любая другая точка хуже $\mathbf{x}^0$, эквивалентна $\mathbf{x}^0$ или предпочитается $\mathbf{x}^0$. Таким образом, для любого набора $\mathbf{x}^0$ потребительское множество *разбивается* на три подмножества $\prec(\mathbf{x}^0)$, $\sim(\mathbf{x}^0)$ и $\succ(\mathbf{x}^0)$.

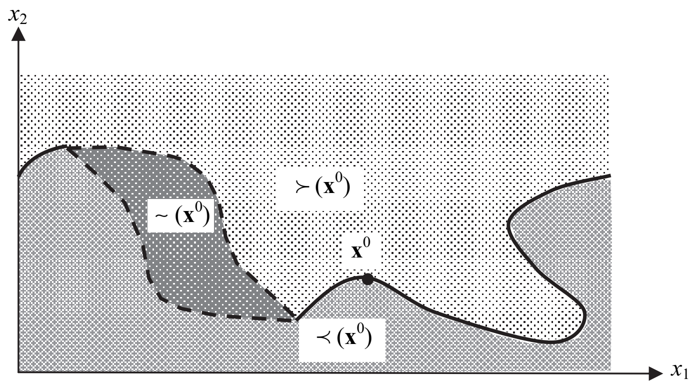


Рис. 1.1. Гипотетические предпочтения, удовлетворяющие аксиомам 1 и 2

Предпочтения на рис. 1.1 могут показаться довольно странными. Они обладают лишь минимальной структурой, но вместе с тем ничем не противоречат первым двум аксиомам. Ни одно из наших предположений не запрещает изображенные на рисунке «неправильности» — «толстые» зоны безразличия или «разрывы» и «изгибы» множества безразличия $\sim(\mathbf{x}^0)$, которые можно исключить только путем дополнительных ограничений на предпочтения.

Рассмотрим некоторые новые предположения. Одно из них очень слабо связано с поведением потребителя и преимущественно характеризует чисто математические аспекты представления предпочтений; остальные описывают вкусы потребителя по отношению к объектам из потребительского множества.

Первая аксиома является своего рода условием топологической регулярности предпочтений. Ее назначение прояснится немного позже.

Здесь и далее мы предполагаем, что $X = \mathbb{R}^n_+$.

Аксиома 3. Непрерывность. *Для каждого* $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}_+$ *множество «не хуже чем»* ($\succsim (\mathbf{x}^0)$) *и множество «не лучше чем»* ($\precsim (\mathbf{x}^0)$) *являются замкнутыми в* $\mathbb{R}^n_+$.

Вспомним, что множество замкнуто, если его дополнение открыто, т.е. замкнутость $\succsim (\mathbf{x}^0)$ в $\mathbb{R}^n_+$ означает, что его дополнение $\prec (\mathbf{x}^0)$ открыто в $\mathbb{R}^n_+$.

Аксиома непрерывности гарантирует невозможность резких изменений предпочтений на противоположные. Действительно, ее эквивалентная формулировка следующая: если каждый элемент $\mathbf{y}^n$ последовательности потребительских наборов не хуже (не лучше) $\mathbf{x}$, а $\mathbf{y}^n$ сходится к $\mathbf{y}$, то $\mathbf{y}$ не хуже (не лучше) $\mathbf{x}$. Заметим, что поскольку множества $\succsim (\mathbf{x}^0)$ и $\precsim (\mathbf{x}^0)$ замкнуты, то и множество $\sim (\mathbf{x}^0)$ замкнуто, так как оно является их пересечением. Следовательно, с аксиомой 3 несовместимо наличие открытой области в множестве безразличия в левой верхней части рис. 1.1.

Дополнительные предположения о вкусах потребителя придают предпочтениям более структурированный вид, ту регулярность, с которой вы, возможно, уже знакомы по предшествующим курсам экономической теории. Их следует подбирать исходя из особенностей анализируемой задачи потребительского выбора. Мы последовательно рассмотрим некоторые ключевые предположения относительно вкусов, которые обычно делаются в «стандартной» теории потребителя, и попробуем понять, какое влияние они по отдельности или все вместе оказывают на структуру предпочтений. В каждом классе предположений мы будем двигаться от менее жестких ограничений к более жестким и в дальнейшем, как правило, будем использовать последние. Номерами со штрихом обозначены аксиомы, соответствующие концептуально близким, но менее жестким ограничениям, чем соответствующие аксиомы без штриха.

Представляя предпочтения на множестве обычных потребительских благ, мы хотели бы отразить тот основополагающий факт, что «потребности» по существу не ограничены. Весьма приближенно это можно выразить как предположение о том, что всегда найдется такое изменение в структуре (любого) потребительского плана данного потребителя, которое после его осуществления приведет к более предпочтительному плану, который этот потребитель предпочитает первоначальному. Оно может включать увеличение объема одних товаров и уменьшение объема других, увеличение объема всех товаров или даже уменьшение объема всех товаров. Благодаря данному предположению мы лишаем потребителя возможности *вообразить*, что все его прихоти и потребности в товарах полностью удовлетворены. Формально это предположение имеет вид[1]:

Аксиома 4′. Локальная ненасыщаемость. *Для любых* $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует* $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0) \cap \mathbb{R}^n_+$ *такой, что* $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}^0$, *где* $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ *обозначает открытую окрестность радиуса* ε *с центром в точке* $\mathbf{x}^0$.

Аксиома 4′ гласит, что в сколь угодно малой окрестности данной точки $\mathbf{x}^0$ всегда найдется хотя бы одна отличная от нее точка $\mathbf{x}$, которую потребитель предпочтет $\mathbf{x}^0$. Эта аксиома существенным образом влияет на структуру возможных множеств безразличия. Она исключает появление «зон безразличия», подобных окрестности точки $\mathbf{x}^1$ на рис. 1.2. Чтобы убедиться в этом, заметим, что на рис. 1.2 всегда можно найти некоторое $\varepsilon > 0$ и окрестность $B_\varepsilon(\mathbf{x}^1)$, в которой будут содержаться только точки, эквивалентные $\mathbf{x}^1$. Тогда, конечно, нарушается аксиома 4′, поскольку она требует, чтобы независимо от выбранного $\varepsilon > 0$ в соответствующей окрестности *всегда* имелась хотя бы одна точка, строго предпочитаемая точке $\mathbf{x}^1$. Предпочтения, изображенные на рис. 1.3, удовлетворяют аксиоме 4′, а также аксиомам 1—3.

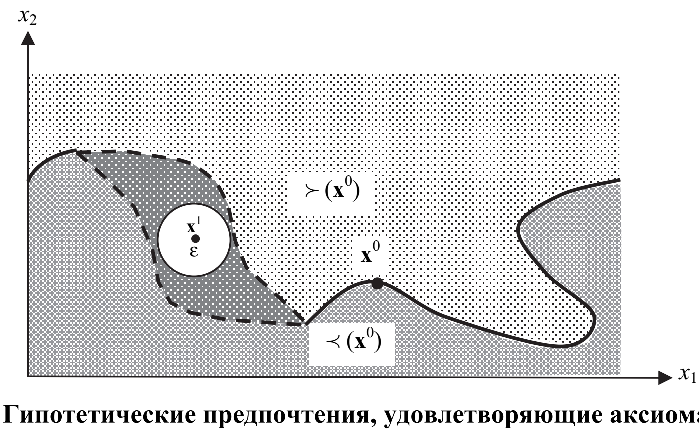


Рис. 1.2. Гипотетические предпочтения, удовлетворяющие аксиомам 1, 2 и 3

Весьма распространено и другое, более жесткое ограничительное представление о потребностях, согласно которому больше всегда лучше, чем меньше. Хотя свойство локальной ненасыщаемости требует, чтобы вблизи каждой точки всегда имелась более предпочтительная альтернатива, оно не исключает возможности того, что количество одного или всех товаров в этой альтернативе будет меньше. Точнее, из него *не следует*,

[1] См. определение А1.4 в математическом приложении.

что потребителю будет лучше, если он получит больше каждого товара. Альтернативная точка зрения предполагает, что потребитель *всегда* предпочтет план с бóльшим количеством товаров плану с меньшим количеством товаров, и формулируется в виде аксиомы *монотонности*. Введем следующие обозначения: если набор $\mathbf{x}^0$ содержит не меньше каждого товара, чем $\mathbf{x}^1$, то это записывается как $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$, а если $\mathbf{x}^0$ содержит *строго* больше каждого товара, чем $\mathbf{x}^1$, то это записывается как $\mathbf{x}^0 \gg \mathbf{x}^1$.

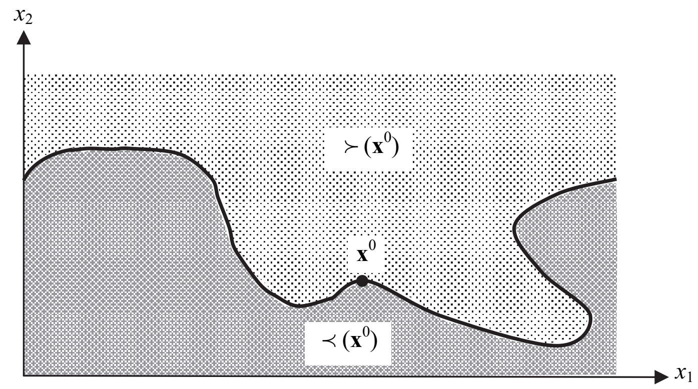


Рис. 1.3. Гипотетические предпочтения, удовлетворяющие аксиомам 1, 2, 3 и 4′

Аксиома 4. Монотонность. *Для любых* $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$ *если* $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$, *то* $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$, *а если* $\mathbf{x}^0 \gg \mathbf{x}^1$, *то* $\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^1$.

Аксиома 4 утверждает, что если один набор $\mathbf{x}^0$ содержит не меньше каждого товара, чем другой набор $\mathbf{x}^1$, то $\mathbf{x}^0$ не хуже $\mathbf{x}^1$. Более того, $\mathbf{x}^0$ строго лучше, если в нем строго больше каждого товара. Влияние этой аксиомы на структуру множества безразличия и других определенных выше множеств также существенно. Во-первых, должно быть ясно, что из аксиомы 4 следует аксиома 4′, т.е. если предпочтения удовлетворяют аксиоме 4, они автоматически удовлетворяют аксиоме 4′. Тем самым аксиома 4 оказывает тот же эффект на структуру множества безразличия, а также других множеств («лучше чем» и «хуже чем»), что и аксиома 4′, но с небольшими дополнениями. В частности, аксиома 4 исключает для множеств безразличия в $\mathbb{R}^n_+$ возможность «загибаться вверх», или содержать сегменты с положительным наклоном. Она также требует, чтобы множества «лучше чем» находились «над» множествами безразличия, а множества «хуже чем» — «под» ними.

Продемонстрируем это на рис. 1.4. Согласно аксиоме 4, точки выше и правее $\mathbf{x}^0$ и точки ниже и левее $\mathbf{x}^0$ не могут находиться в том же множестве безразличия, что и $\mathbf{x}^0$. Любая точка выше и правее $\mathbf{x}^0$, например $\mathbf{x}^1$, содержит больше каждого товара по сравнению с $\mathbf{x}^0$. Все такие точки должны строго предпочитаться $\mathbf{x}^0$. Аналогично любая точка ниже и левее $\mathbf{x}^0$, например $\mathbf{x}^2$, содержит меньше каждого товара. По аксиоме 4, $\mathbf{x}^0$ должна строго предпочитаться $\mathbf{x}^2$ и всем остальным точкам этого квадранта, поэтому ни одна из них не может находиться в том же множестве безразличия, что и $\mathbf{x}^0$. Для любого $\mathbf{x}^0$ точки выше и правее множества безразличия войдут в множество $\succ(\mathbf{x}^0)$, точки ниже и левее — в множество $\prec(\mathbf{x}^0)$. Множество предпочтений, удовлетворяющих аксиомам 1, 2, 3 и 4, изображено на рис. 1.5.

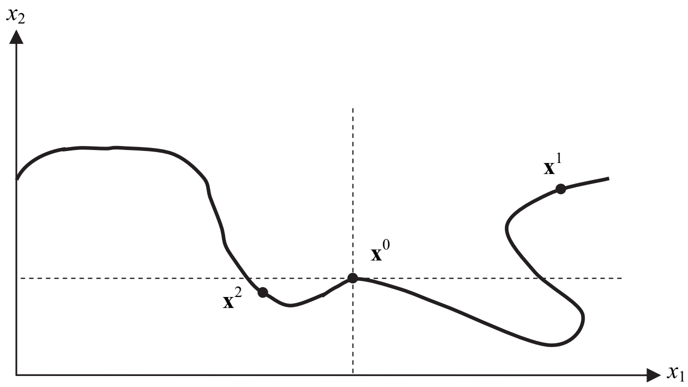


Рис. 1.4. Гипотетические предпочтения, удовлетворяющие аксиомам 1, 2, 3 и 4´

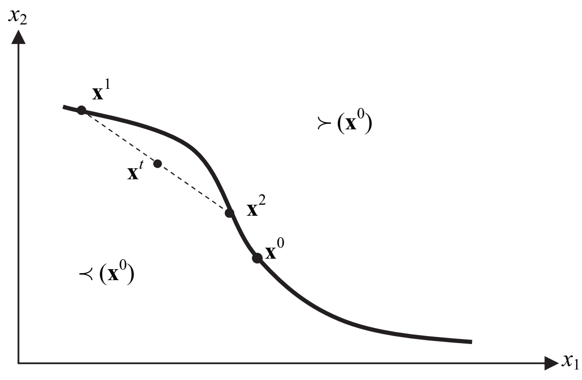


Рис. 1.5. Гипотетические предпочтения, удовлетворяющие аксиомам 1, 2, 3 и 4

Предпочтения на рис. 1.5 ближе всего к тем, которые вам, несомненно, встречались в предшествующих курсах экономики. Тем не менее они отличаются от уже знакомых вам предпочтений очень важной особенностью: обычно области невыпуклости типа северо-западной части предпочтений не допускаются. Это достигается путем использования последней аксиомы, которую мы сформулируем в двух вариантах, а затем рассмотрим их смысл и назначение.

Аксиома 5′. Выпуклость. *Если* $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$*, то* $t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^0$ *для любых* $t \in [0,\ 1]$.

Чуть более сильный вариант звучит так.

Аксиома 5. Строгая выпуклость. *Если* $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ *и* $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$*, то* $t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^0$ *для любых* $t \in (0,\ 1)$.

Прежде всего заметим, что и аксиома 5′, и аксиома 5 — в сочетании с аксиомами 1, 2, 3 и 4 — исключают появление вогнутых к началу координат участков во множествах безразличия, таких, как в левой верхней части рис. 1.5. Чтобы убедиться в этом, выберем две различные точки на множестве безразличия, изображенном на рисунке. Поскольку и $\mathbf{x}^1$, и $\mathbf{x}^2$ эквивалентны $\mathbf{x}^0$, то $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$. Выпуклые комбинации двух этих точек, такие, как $\mathbf{x}^t$, будут лежать в множестве $\prec(\mathbf{x}^0)$, нарушая условия аксиом 5′ и 5.

Оказывается, аксиому 5′ можно ввести без ущерба для целей развиваемой здесь теории (поведения) потребителя: предсказательное содержание будет тем же как с данной аксиомой, так и без нее. Хотя подобное утверждение для чуть более сильной аксиомы 5 не вполне верно, она значительно упрощает анализ.

Существует по крайней мере два способа понять на интуитивном уровне значение выпуклости потребительских предпочтений. Предпочтения, изображенные на рис. 1.6, удовлетворяют и аксиоме 5′, и аксиоме 5. Снова предположим, что мы выбрали различные точки $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$. Точка $\mathbf{x}^1$ представляет собой набор, в котором доля товара x_2 относительно велика по сравнению с набором $\mathbf{x}^2$. Набор $\mathbf{x}^2$, напротив, содержит относительно большую по сравнению с $\mathbf{x}^1$ долю товара x_1. Тем не менее для потребителя эти наборы эквивалентны. Любая выпуклая комбинация $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$, например $\mathbf{x}^t$, будет содержать более «сбалансированное» сочетание x_1 и x_2, чем каждый из них в отдельности. Смысл аксиом 5′ и 5 сводится к тому, чтобы запретить потребителю впадать в крайности: аксиома 5′ требует, чтобы любой относительно сбалансированный набор (например, $\mathbf{x}^t$) был для потребителя не хуже экстремальных наборов, а аксиома 5 — чтобы он был строго лучше. И в том, и в другом случае от предпочтений требуется некоторое «смещение» в сторону сбалансированного потребления.

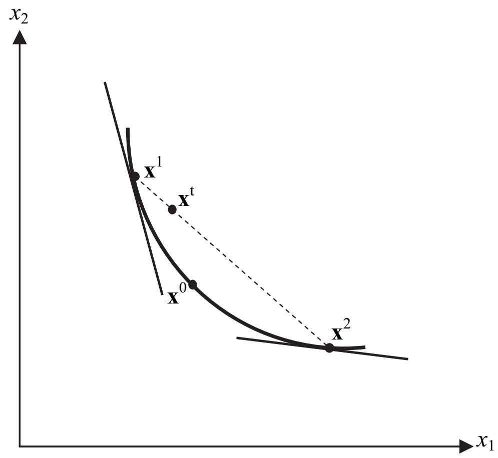


Рис. 1.6. Гипотетические предпочтения, удовлетворяющие аксиомам 1, 2, 3, 4 и 5´ или 5

Второй способ описать значение выпуклости связан с «кривизной» самих множеств безразличия. Если $X = \mathbb{R}^2_+$, то модуль наклона кривой безразличия называется ***предельной нормой замещения***. В каждой точке кривой эта величина показывает, от какого количества товара x_2 потребитель готов отказаться в обмен на единицу товара x_1, оказавшись при этом с эквивалентным потребительским набором.

Если предпочтения монотонны, то любая форма выпуклости требует, чтобы кривые безразличия были хотя бы слабо выпуклыми к началу координат. Это эквивалентно условию невозрастания предельной нормы замещения при движении от наборов с относительно высокой долей товара x_2 (таких, как $\mathbf{x}^1$) к наборам с относительно высокой долей товара x_1 (таким, как $\mathbf{x}^2$). Можно сказать, что когда у потребителя относительно мало товара x_2 и много товара x_1, он не более склонен к обмену x_2 на x_1, чем в ситуации, когда у него относительно много x_2 и мало x_1. Согласно аксиоме 5´, пропорция, в которой потребитель обменивает x_2 на x_1, оставаясь при этом на той же кривой безразличия, является либо постоянной, либо убывает при движении по кривой безразличия слева направо. Аксиома 5 выдвигает более сильное требование строгого убывания этой пропорции. На рис. 1.6 изображены предпочтения, удовлетворяющие данному свойству, которое иногда называется ***принципом убывания предельной нормы замещения*** в потреблении.

Итак, мы рассмотрели ряд аксиом, описывающих предпочтения потребителя. Наша цель заключалась в том, чтобы выяснить влияние каждой из них по отдельности и всех вместе на структуру и представление предпочтений. Подведем краткие итоги этого анализа. Аксиомы о потребительских предпочтениях можно разбить на следующие группы. Аксиомы *полноты* и *транзитивности* описывают потребителя, который может непротиворечивым образом сравнивать различные альтернативы. Аксиома *непрерывности* обеспечивает существование топологически приемлемых множеств «не хуже чем» и «не лучше чем» и вводится преимущественно из математических соображений. Все остальные аксиомы служат для того, чтобы охарактеризовать *вкусы* потребителя по отношению к объектам выбора. Обычно мы предполагаем, что вкусы демонстрируют некоторую форму ненасыщаемости (слабую или сильную), а также некоторую смещенность в сторону сбалансированного потребления (слабую или сильную).

1.2.2. Функция полезности

В современной теории функция полезности является просто удобным инструментом для обобщения информации об отношении предпочтения потребителя — не больше и не меньше. Иногда удобнее работать напрямую с отношением предпочтения и соответствующими множествами. В других случаях, особенно если использовать методы математического анализа, удобнее работать с функцией полезности. Отношение предпочтения считается базовой, наиболее фундаментальной характеристикой предпочтений, а функция полезности лишь «представляет», или обобщает, передаваемую им информацию. Формально функция полезности определяется следующим образом.

Определение 1.5. Функция полезности, представляющая отношение предпочтения $\succsim$.

Вещественнозначная функция $u:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *называется функцией полезности, представляющей отношение предпочтения* $\succsim$*, если для любых* $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$ $u(\mathbf{x}^0) \ge u(\mathbf{x}^1) \Leftrightarrow \mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$.

Тем самым функция полезности представляет отношение предпочтения потребителя, если более предпочтительным наборам она ставит в соответствие бóльшие числа.

Вопрос, который ранее привлекал внимание теоретиков, касался свойств, которыми должно обладать отношение предпочтения, чтобы гарантировать его представимость в виде непрерывной вещественнозначной функции. Он весьма важен, поскольку анализ многих проблем в теории потребителя крайне упрощается, если есть возможность работать с функцией полезности, а не с самим отношением предпочтения.

С математической точки зрения это вопрос *существования* непрерывной функции полезности, представляющей отношение предпочтения. Оказывается, некоторые из уже рассмотренных нами аксиом — как раз то, что требуется для существования такой функции. Можно показать, что любое бинарное отношение, которое является *полным*, *транзитивным* и *непрерывным*, можно представить непрерывной вещественнозначной функцией полезности[1]. (В упражнениях вам предлагается показать, что эти три аксиомы являются также необходимым условием для такого представления.) Все вместе эти аксиомы требуют, чтобы потребитель умел делать непротиворечивый бинарный выбор, а отношение предпочтения отвечало некоторым условиям топологической «регулярности». В частности, возможность представить предпочтения функцией полезности *не* зависит от предположений о вкусах потребителя, таких, как выпуклость или даже монотонность, что открывает путь к использованию непрерывных функций полезности для анализа и решения исключительно широкого круга задач.

Здесь мы подробно рассмотрим чуть менее общий результат. В дополнение к трем вышеупомянутым основополагающим аксиомам мы введем условие монотонности предпочтений. Оно не существенно для представимости, но упрощает чисто математические тонкости задачи и делает доказательство утверждения интуитивно более ясным. Заметим при этом, что нам не потребуется ни одна из форм выпуклости.

Теорема 1.1. Существование вещественнозначной функции, представляющей отношение предпочтения.

Если бинарное отношение $\succsim$ является полным, транзитивным, непрерывным и монотонным, то существует непрерывная вещественнозначная функция $u:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, представляющая $\succsim$.

Обратите внимание на то, что это исключительно теорема *существования*. Она утверждает, что при указанных условиях гарантируется существование хотя бы одной непрерывной вещественнозначной функции, представляющей отношение предпочтения. Такая функция может быть (и на самом деле всегда будет) не единственной. Однако сама теорема ниче-

[1] См., например, работы Бартена и Бёма [Barten, Böhm, 1982]. Классическим источником является работа Дебре [Debreu, 1954].

го не говорит о том, как много таких функций и какой вид они имеют. Тем самым если мы сможем придумать всего лишь *одну* непрерывную функцию, представляющую данные предпочтения, то теорема будет доказана. В доказательстве, приведенном ниже, применена именно такая стратегия.

Доказательство. Пусть отношение $\succsim$ является полным, транзитивным, непрерывным и монотонным и пусть $\mathbf{e} \equiv (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$ — вектор, состоящий из единиц. Рассмотрим отображение $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, определенное таким образом, что выполняется следующее условие[1]:

$$u(\mathbf{x})\mathbf{e} \sim \mathbf{x}\,. \tag{P-1}$$

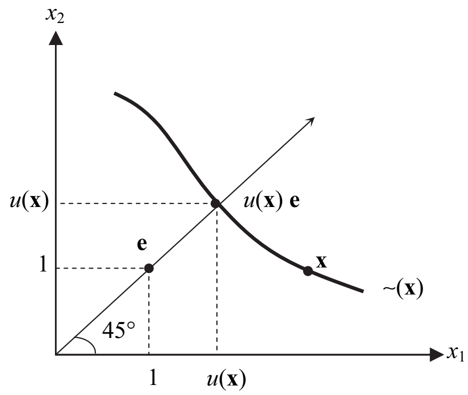


Рис. 1.7. Построение отображения $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$

Убедимся, что мы правильно понимаем это выражение. Оно означает: «возьмем любой $\mathbf{x}$ из множества $\mathbb{R}^n_+$ и сопоставим ему число $u(\mathbf{x})$ такое, что набор $u(\mathbf{x})\mathbf{e}$, содержащий $u(\mathbf{x})$ единиц каждого товара, эквивалентен $\mathbf{x}$».

---

[1] Для $t \geq 0$ вектор $t\mathbf{e}$ будет некоторой точкой в $\mathbb{R}^n_+$, каждая из координат которой равна t, поскольку $t\mathbf{e} = t(1, \ldots, 1) = (t, \ldots, t)$. Если $t = 0$, то $t\mathbf{e} = (0, \ldots, 0)$ совпадает с началом координат. Если $t = 1$, то $t\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$ совпадает с $\mathbf{e}$. Если $t > 1$, то точка $t\mathbf{e}$ лежит дальше от начала координат, чем $\mathbf{e}$. При $0 < t < 1$ точка $t\mathbf{e}$ лежит между началом координат и $\mathbf{e}$. Отсюда должно быть ясно, что при любом $t \geq 0$ $t\mathbf{e}$ будет точкой в $\mathbb{R}^n_+$, лежащей на луче, выходящем из начала координат и проходящем через точку $\mathbf{e}$, т.е. некоторой точкой на биссектрисе координатного угла на рис. 1.7.

Сразу же возникают два вопроса. Во-первых, всегда ли существует число $u(\mathbf{x})$, удовлетворяющее (P-1)? Во-вторых, является ли оно единственным, так что функция $u(\mathbf{x})$ корректно определена?

Чтобы ответить на первый вопрос, зафиксируем $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ и рассмотрим два подмножества в множестве вещественных чисел:

$$A \equiv \{t \geq 0 \mid t\mathbf{e} \succsim \mathbf{x}\}$$

$$B \equiv \{t \geq 0 \mid t\mathbf{e} \precsim \mathbf{x}\}\,.$$

Заметим, что если $t^* \in A \cap B$, то $t^*\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$, так что можно положить $u(\mathbf{x}) = t^*$, и это будет удовлетворять (P-1). Тем самым на первый вопрос можно ответить утвердительно, если мы покажем, что $A \cap B$ всегда не пусто. Именно это мы сейчас и сделаем.

Из упражнения 1.11 следует, что непрерывность $\succsim$ означает замкнутость A и B в $\mathbb{R}_+$. Согласно монотонности из $t \in A$ следует, что $t' \in A$ для всех $t' \geq t$. Тогда A должно быть замкнутым интервалом вида $[\underline{t},\ \infty]$. Аналогично, монотонность и замкнутость B в $\mathbb{R}_+$ означают, что B должно быть замкнутым интервалом вида $[0,\ \overline{t}\,]$. Далее, для любого $t \geq 0$ из полноты $\succsim$ следует, что либо $t\mathbf{e} \succsim \mathbf{x}$, либо $t\mathbf{e} \precsim \mathbf{x}$, т.е. что $t \in A \cup B$. Но отсюда $\mathbb{R}_+ = A \cup B = [0,\ \overline{t}\,] \cup [\underline{t},\ \infty]$, поэтому $\underline{t} \leq \overline{t}$ и $A \cap B \neq \varnothing$.

Обратимся ко второму вопросу. Нам необходимо показать, что существует *только одно* число $t \geq 0$ такое, что $t\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$. Но это легко видеть из того, что если $t_1\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$ и $t_2\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$, то по транзитивности $\sim$ (см. упражнение 1.4) $t_1\mathbf{e} \sim t_2\mathbf{e}$. Из монотонности следует, что $t_1 = t_2$.

Мы приходим к выводу, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ = X$ существует единственное число $u(\mathbf{x})$, для которого выполняется (P-1). Покажем теперь, что предпочтения $\succsim$ представимы с помощью этой функции.

Рассмотрим два набора $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ и соответствующие им значения полезностей $u(\mathbf{x}^1)$ и $u(\mathbf{x}^2)$, которые по определению удовлетворяют условиям $u(\mathbf{x}^1)\mathbf{e} \sim \mathbf{x}^1$ и $u(\mathbf{x}^2)\mathbf{e} \sim \mathbf{x}^2$. Тогда мы получаем следующее:

$$\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow \tag{P-2}$$

$$\Leftrightarrow u(\mathbf{x}^1)\mathbf{e} \sim \mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \sim u(\mathbf{x}^2)\mathbf{e} \Leftrightarrow \tag{P-3}$$

$$\Leftrightarrow u(\mathbf{x}^1)\mathbf{e} \succsim u(\mathbf{x}^2)\mathbf{e} \Leftrightarrow \tag{P-4}$$

$$\Leftrightarrow u(\mathbf{x}^1) \geq u(\mathbf{x}^2)\,. \tag{P-5}$$

Здесь (Р-2) $\Leftrightarrow$ (Р-3) по определению функции u; (Р-3) $\Leftrightarrow$ (Р-4) следует из транзитивности $\succsim$, транзитивности и определения $\sim$ и определения u; (Р-4) $\Leftrightarrow$ (Р-5) следует из монотонности $\succsim$. Вместе выражения (Р-2) — (Р-5) означают, что (Р-2) $\Leftrightarrow$ (Р-5), поэтому $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}^1) \geq u(\mathbf{x}^2)$, что и требовалось доказать.

Остается только показать непрерывность функции полезности $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, представляющей $\succsim$. По теореме А1.6 для этого достаточно показать, что для функции u прообраз любой открытой окрестности является открытым в $\mathbb{R}^n_+$. Поскольку открытые окрестности в $\mathbb{R}$ — это просто открытые интервалы, нужно показать, что $u^{-1}((a,b))$ открыто в $\mathbb{R}^n_+$ для любых $a < b$.

Имеем:

$$\begin{aligned} u^{-1}((a,b)) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid a < u(\mathbf{x}) < b\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid a\mathbf{e} \prec u(\mathbf{x})\mathbf{e} \prec b\mathbf{e}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid a\mathbf{e} \prec \mathbf{x} \prec b\mathbf{e}\}. \end{aligned}$$

Первое равенство следует из определения прообраза, второе — из монотонности $\succsim$, а третье — из условия $u(\mathbf{x})\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$ и упражнения 1.4. Перепишем последнее выражение так:

$$u^{-1}((a,b)) = \succ(a\mathbf{e}) \cap \prec(b\mathbf{e}). \tag{Р-6}$$

Вследствие непрерывности $\succsim$, множества $\precsim(a\mathbf{e})$ и $\succsim(b\mathbf{e})$ замкнуты в $X = \mathbb{R}^n_+$. Два множества в правой части (Р-6) представляют собой дополнения к ним и поэтому открыты в $\mathbb{R}^n_+$, а по упражнению А1.28 $u^{-1}((a,b))$ как пересечение открытых множеств само является открытым в $\mathbb{R}^n_+$. ■

Теорема 1.1 очень важна. Она позволяет нам описывать предпочтения либо с помощью отношения предпочтения и базовых множеств, либо в числовом виде с помощью непрерывной функции полезности. Но представление функцией полезности данного отношения предпочтения никогда не является единственным. Если некоторая функция u представляет предпочтения потребителя, то их будет представлять и функция $v = u + 5$, и функция $v = u^3$, поскольку каждая из них ранжирует наборы благ точно так же, как и u. Это важная особенность функций полезности. Если от отношения предпочтения нам требуется только то, чтобы оно упорядочивало наборы из потребительского множества, а от функции полезности — чтобы она отражала этот порядок с помощью чисел, сопоставляемых наборам, то любая *другая* функция, которая сопоставляет потребительским наборам числа в том же порядке, что и функция u, *тоже* будет представлять отношение предпочтения и не хуже u сможет выступать в качестве функции полезности.

Это свойство называется по-разному. Иногда говорят, что функция полезности *инвариантна относительно положительных монотонных преобразований* или что она *единственна с точностью до положительного монотонного преобразования*. В любом случае суть такова: если от отношения предпочтения нам требуется только осмысленное ранжирование наборов, то любая функция полезности, представляющая это предпочтение, может дать нам только *порядковую* информацию, не более, но и не менее. Если мы знаем, что некоторая функция корректно отражает порядок наборов, то любое ее преобразование, сохраняющее этот порядок, также может служить в качестве функции полезности.

Это свойство дает нам свободу и одновременно ограничивает ее. Если у нас есть функция u, представляющая предпочтения некоторого потребителя, то мы можем преобразовать u в другую, возможно, более удобную, форму при условии сохранения ранжирования наборов. В то же время мы ограничены тем, что числа, сопоставляемые данной функцией полезности конкретным наборам, не имеют никакого значения — важен только порядок этих чисел[1]. Хотя этот вывод достаточно прост, он заслуживает отдельной формулировки. Его доказательство оставлено в качестве упражнения.

Теорема 1.2. Инвариантность функции полезности относительно положительных монотонных преобразований.

Пусть $\succsim$ *является отношением предпочтения в* $\mathbb{R}^n_+$. *Предположим, что оно представимо функцией полезности* $u(\mathbf{x})$. *Другая функция* $v(\mathbf{x})$ *может представлять это отношение предпочтения тогда и только тогда, когда* $v(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$ *для любого* $\mathbf{x}$, *где* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *строго возрастает на множестве значений функции* u.

Чтобы завершить описание потребительских предпочтений, мы, как правило, будем вводить для них некоторые дополнительные предположения. Естественно, это будет отражаться на свойствах соответствующей им функции полезности. И наоборот, если мы предположим, что функция полезности обладает некоторыми свойствами помимо непрерывности, это

---

[1] Некоторые теоретики настолько опасаются возможного смешения современного термина «функция полезности» и классического утилитаристского понятия «полезность» как измеримого количества удовольствия или неудовольствия, что полностью отказываются от устаревшей терминологии и говорят только об отношениях предпочтения и их «функциях представления».

будет означать наличие дополнительных условий на соответствующее ей отношение предпочтения. Таким образом, аксиомы о предпочтениях эквивалентны конкретным математическим свойствам функции полезности. В завершение данного раздела мы перечислим некоторые из них. Следующая теорема крайне проста, поскольку сразу же следует из определений. Однако ее утверждения стоит проверить, поэтому доказательство оставлено в качестве упражнения. (См. в математическом приложении определения строго возрастающей, квазивогнутой и строго квазивогнутой функций.)

Теорема 1.3. Свойства предпочтений и функции полезности.

Пусть отношение предпочтения $\succsim$ *представимо функцией* $\mathrm{u}:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. *Тогда:*

1) $u(\mathbf{x})$ *строго возрастает тогда и только тогда, когда* $\succsim$ *монотонно*;

2) $u(\mathbf{x})$ *квазивогнута тогда и только тогда, когда* $\succsim$ *выпукло*;

3) $u(\mathbf{x})$ *строго квазивогнута тогда и только тогда, когда* $\succsim$ *строго выпукло*.

Далее будем анализировать задачи, используя аппарат математического анализа. До сих пор мы ограничивались непрерывностью функции полезности и гарантирующими ее свойствами отношения предпочтения. Дифференцируемость, конечно, представляет собой более сильное условие, чем непрерывность. В интуитивном понимании непрерывность требует, чтобы в предпочтениях не было внезапных резких изменений на противоположные, но не противоречит, например, наличию «изломов». Дифференцируемость исключает возможность такого поведения и обеспечивает не только непрерывность, но и «гладкость» кривых безразличия, поэтому она требует более жесткого ограничения на предпочтения. Аналогично аксиоме непрерывности, все, что требуется, — это правильное математическое условие. Мы не будем его выводить, а отошлем читателя к работе Дебре [Debreu, 1972]. Здесь же нам достаточно просто предположить, что представляющая предпочтения функция полезности дифференцируема в тех случаях, когда это необходимо.

В случае, когда функция полезности дифференцируема, используется особый набор терминов. Приведем их. Первая частная производная $u(\mathbf{x})$ по x_i называется ***предельной полезностью i-го товара***. В случае двух товаров мы определяли предельную норму замещения как модуль наклона кривой безразличия. Можно выразить ее в терминах предельных полезностей двух товаров. Для этого рассмотрим произвольный набор $\mathbf{x}^1 = (x_1^1,\ x_2^1)$. Поскольку кривая безразличия, проходящая через точку $\mathbf{x}^1$, является функцией на плоскости $(x^1,\ x^2)$, предположим, что она задается выражением $x_2 = f(x_1)$. Тогда при изменении x_1 точка $(x_1,\ x_2) = (x_1,\ f(x_1))$ описывает кривую безразличия, содержащую $\mathbf{x}^1$. Следовательно, для любых x_1

$$u(x_1,\ f(x_1)) = \text{const}. \tag{1-1}$$

Предельная норма замещения первого блага на второе в точке $\mathbf{x}^1 = (x_1^1,\ x_2^1)$ обозначается $MRS_{12}(x_1^1,\ x_2^1)$ и равна модулю наклона кривой безразличия, проходящей через $(x_1^1,\ x_2^1)$:

$$MRS_{12}(x_1^1,\ x_2^1) \equiv \left| f'(x_1^1) \right| = -f'(x_1^1), \tag{1-2}$$

поскольку $f' < 0$. Но по (1-1) $u(x_1,\ f(x_1))$ является константой по x_1, поэтому ее производная по x_1 должна быть равна нулю:

$$\frac{\partial u(x_1,\ x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1,\ x_2)}{\partial x_2} f'(x_1) = 0. \tag{1-3}$$

Из (1-2) и (1-3) следует, что

$$MRS_{12}(\mathbf{x}^1) = \frac{\partial u(\mathbf{x}^1)/\partial x_1}{\partial u(\mathbf{x}^1)/\partial x_2}\,^{1}.$$

Аналогично, если число товаров больше двух, то предельная норма замещения блага i благом j определяется как отношение их предельных полезностей

$$MRS_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i}{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_j}.$$

Если предельные полезности положительны, $MRS_{ij}(\mathbf{x})$ является положительным числом и показывает, в каком соотношении x_i можно заменить на x_j без изменения полезности потребителя.

Если функция $u(\mathbf{x})$ дифференцируема на $\mathbb{R}^n_{++}$, а предпочтения монотонны, предельная полезность каждого товара почти всегда строго положительна, т.е. $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i > 0$ для «почти всех» наборов $\mathbf{x}$ и всех

---

[1] Соответствующее выражение можно получить напрямую, рассматривая дифференциал функции $u(\mathbf{x})$. — *Примеч. ред.*

$i = 1, \ldots, n$[1]. Когда предпочтения строго выпуклы, предельная норма замещения двух товаров всегда строго убывает вдоль любой поверхности уровня функции полезности. Вообще, для любой квазивогнутой функции полезности ее гессиан $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ будет удовлетворять условию

$$\mathbf{y}^T\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{y} \le 0 \text{ для всех векторов } \mathbf{y} \text{ таких, что } \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Если неравенство строгое, то это выражение означает, что движение из точки $\mathbf{x}$ в направлении $\mathbf{y}$ по касательной к поверхности безразличия, проходящей через $\mathbf{x}$ ($\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = 0$), приводит к снижению полезности (т.е. $\mathbf{y}^T\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{y} < 0$).

1.3. Задача потребителя

Мы занимались структурой и представлением предпочтений, но это только одна из четырех составных частей теории потребительского выбора. В данном разделе мы рассмотрим все остальные части и построим из них формальное описание поведения центральной фигуры многих разделов экономической теории — простого атомистического потребителя.

На самом абстрактном уровне мы предполагаем, что у потребителя есть потребительское множество $X = \mathbb{R}^n_+$, содержащее все альтернативы, которые он только может себе представить. Его восприятие этих альтернатив описывается отношением предпочтения $\succsim$, определенным на множестве $\mathbb{R}^n_+$. Реальные условия, в которых находится потребитель, ограничивают набор доступных ему альтернатив допустимым множеством $B \subset \mathbb{R}^n_+$. Наконец, мы предполагаем, что потребитель стремится выбрать наиболее предпочтительную из доступных ему альтернатив в соответствии со своим отношением предпочтения. Формально, он выбирает

$$\mathbf{x}^* \in B \text{ такое, что } \mathbf{x}^* \succsim \mathbf{x} \text{ для всех } \mathbf{x} \in B. \tag{1-4}$$

Чтобы преуспеть в достижении поставленной цели, введем следующие предположения, которые будем считать выполненными, если не указано иное.

---

[1] Если читателю интересно, термин «почти все» означает все наборы, кроме множества, мера Лебега которого равна нулю. Правда, нет необходимости знать о мере Лебега, чтобы понимать необходимость подобного ослабления формулировки. Рассмотрим случай единственного товара x и функцию полезности $u(x) = x + \sin(x)$. Поскольку функция u строго возрастает, она представляет монотонные предпочтения. Однако хотя $u'(x)$ строго положительна для большинства значений x, она равна нулю при $x = \pi + 2\pi k,\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Предположение 1.2. Потребительские предпочтения.

Отношение предпочтения потребителя $\succsim$ *является полным, транзитивным, непрерывным, монотонным и строго выпуклым в* $\mathbb{R}_+^n$. *Тогда по теоремам 1.1 и 1.3 оно представимо с помощью вещественнозначной функции полезности* u, *которая непрерывна, строго возрастает и строго квазивогнута в* $\mathbb{R}_+^n$.

Для случая с двумя товарами подобные предпочтения можно представить с помощью карты безразличия, линии уровня которой не пересекаются, строго выпуклы к началу координат и возрастают по направлению вправо-вверх, как показано на рис. 1.8.

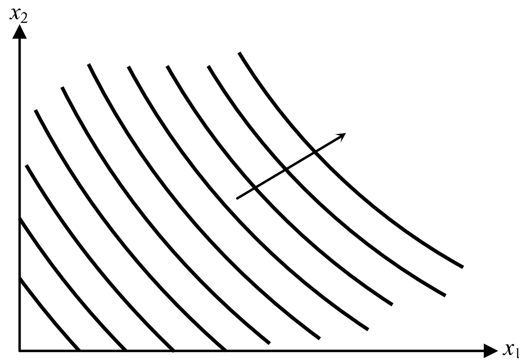


Рис. 1.8. Карта безразличия для предпочтений, удовлетворяющих предположению 1.2

Далее мы рассмотрим условия, в которых находится потребитель, и определим структуру допустимого множества. Нас интересует индивидуальный потребитель, который действует в рамках ***рыночной экономики***. Под рыночной экономикой мы понимаем экономическую систему, в которой взаимодействия между агентами опосредованы рынками. Для каждого товара существует свой рынок, на этих рынках i-му товару соответствует цена p_i. Мы предполагаем, что цены строго положительны, т.е. $p_i > 0, i = 1, \ldots, n$. Кроме того, предполагается, что отдельный потребитель является *несущественной силой* на каждом из рынков. Под этим понимается то, что размер каждого рынка по отношению к потенциальной величине покупки отдельного потребителя настолько велик, что независимо от того, сколько товара он приобретет, рыночная цена не изменится. Формально это означает, что вектор рыночных цен $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ является *фиксированным* с точки зрения потребителя.

Потребитель располагает фиксированным денежным доходом $y \geq 0$. Поскольку на приобретение x_i единиц i-го товара по цене p_i (долларов) необходимо потратить $p_i x_i$ долларов, условие того, что расходы не превышают доходов, можно записать как $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq y$ или более компактно как $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y$. Мы суммируем эти предположения, определив допустимое множество B, которое будет называться ***бюджетным множеством***, следующим образом:

$$B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y\}.$$

В случае с двумя товарами множество B состоит из всех наборов, лежащих внутри или на границах заштрихованной области на рис. 1.9.

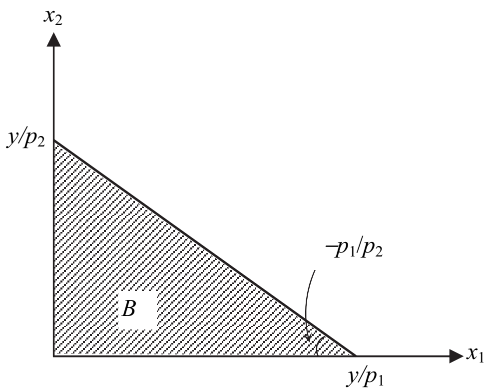


Рис. 1.9. Бюджетное множество $B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y\}$ в случае двух товаров

При желании можно переформулировать задачу потребителя в привычных терминах. В условиях предположения 1.2 предпочтения представимы с помощью строго возрастающей и строго квазивогнутой функции полезности $u(\mathbf{x})$, определенной на потребительском множестве $\mathbb{R}^n_+$. При наших предположениях о допустимом множестве совокупные расходы не должны превышать доходов. Тогда задачу потребителя (1-4) можно переписать *эквивалентным образом* как задачу максимизации функции полезности при бюджетном ограничении. Формально *задача максимизации полезности* потребителя выглядит как

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y. \tag{1-5}$$

Заметим, что если $\mathbf{x}^*$ является решением этой задачи, то $u(\mathbf{x}^*) \geq u(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in B$, а это означает, что $\mathbf{x}^* \succsim \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x} \in B$. То есть решения задачи (1-5) действительно являются решениями задачи (1-4). Обратное также верно.

Остановимся на математической структуре этой задачи. Как мы заметили, при некоторых предположениях относительно предпочтений функция полезности $u(\mathbf{x})$ вещественнозначна и непрерывна. Бюджетное множество B является непустым (оно содержит $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n_+$), замкнутым, ограниченным (поскольку все цены строго положительны) и поэтому компактным подмножеством $\mathbb{R}^n$. Теорема Вейерштрасса (теорема А1.10) гарантирует существование максимума $u(\mathbf{x})$ на B. Далее, поскольку B выпукло, а целевая функция строго квазивогнута, решение задачи максимизации $u(\mathbf{x})$ на B *единственно*. Так как предпочтения монотонны, то решение $\mathbf{x}^*$ будет удовлетворять бюджетному ограничению как *равенству*, т.е. будет лежать не внутри, а *на* границе бюджетного множества. Тем самым, если $y > 0$ и поскольку $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$, но $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$, то $x_i^* > 0$ хотя бы для одного товара. Типичное решение этой задачи в случае двух товаров изображено на рис. 1.10.

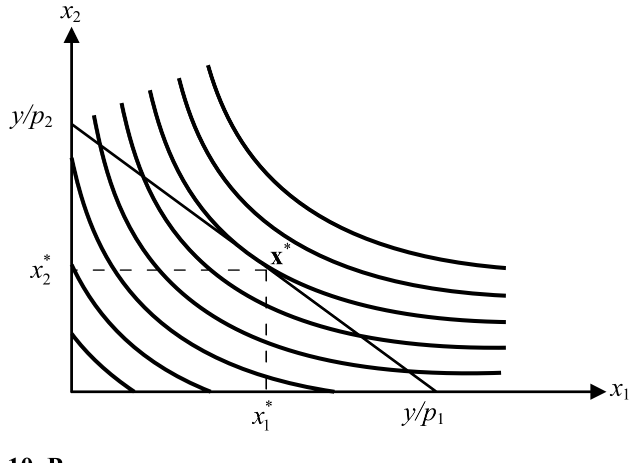


Рис. 1.10. Решение задачи максимизации полезности потребителя

Ясно, что вектор решений $\mathbf{x}^*$ зависит от параметров задачи потребителя. Поскольку он будет единственным для данных значений $\mathbf{p}$ и y, решение задачи (1-5) корректно рассматривать как *функцию*, отображающую цены и доход во множество объемов товаров, $X = \mathbb{R}^n_+$. Поэтому мы часто будем писать $x_i^* = x_i(\mathbf{p},\ y),\ i = 1,\ \ldots, n$ или в векторных обозначениях $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$. Когда решения задачи максимизации полезности рассматриваются как функции $\mathbf{p}$ и y, их называют обыкновенными или ***маршалловскими функциями спроса*** (функциями спроса по Маршаллу). Если доход и цены всех товаров, кроме данного, зафиксированы, то график зависимости между объемом спроса на этот товар x_i и его ценой p_i является стандартной кривой спроса на него.

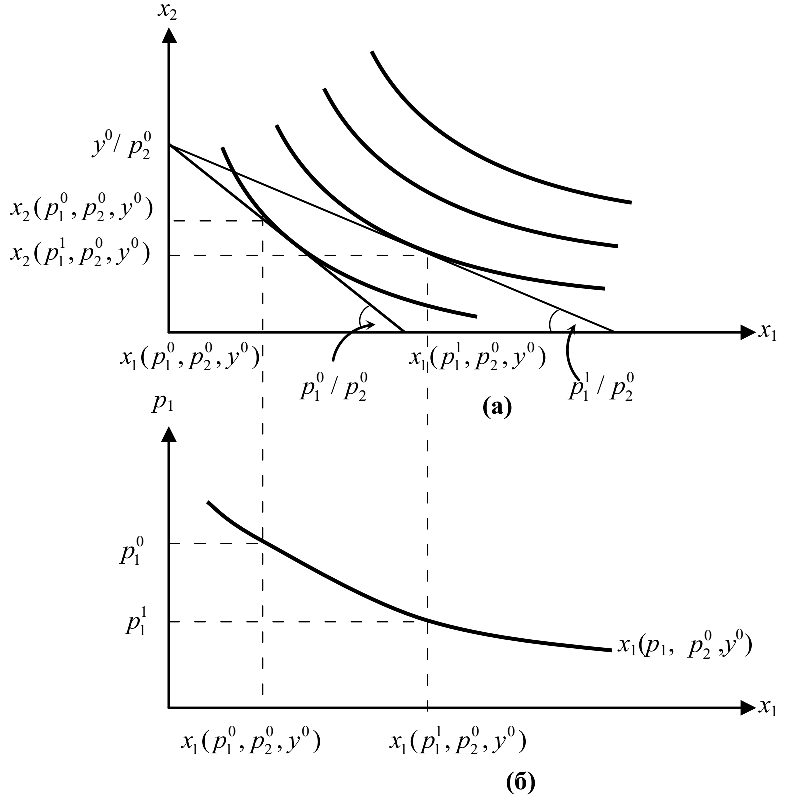


Рис. 1.11. Задача потребителя и поведение потребительского спроса

Связь между задачей потребителя и поведением потребительского спроса проиллюстрирована на рис. 1.11. На рис. 1.11(а) потребитель сталкивается с ценами p_1^0 и p_2^0 и располагает доходом y^0. Объемы товаров $x_1(p_1^0,\ p_2^0,\ y^0)$ и $x_2(p_1^0,\ p_2^0,\ y^0)$ являются решениями задачи потребителя и максимизируют его полезность при данных ценах и доходе. Прямо под этим рисунком, на рис. 1.11(б), цена товара 1 откладывается по вертикальной оси, а объем спроса на товар 1 — по горизонтальной оси. Если изобразить цену p_1^0 и соответствующий объем спроса на товар 1 (при данных цене p_2^0 и доходе y^0), то мы получим одну точку маршалловской кривой спроса потребителя на товар 1. При том же доходе и цене товара 2, но другой цене товара 1 ($p_1^1 < p_1^0$) объемы товаров $x_1(p_1^1,\ p_2^0,\ y^0)$ и $x_2(p_1^1,\ p_2^0,\ y^0)$ также являются решениями задачи потребителя и максимизируют полезность. Если изобразить цену p_1^1 и соответствующий ей объем спроса на товар 1, то мы получим другую точку маршалловской кривой спроса на товар 1 на рис. 1.11(б). Рассмотрев все возможные значения p_1, мы построим всю кривую спроса на товар 1, как изображено на рис. 1.11(б). Как легко проверить, при других уровнях дохода и других ценах товара 2 положение и форма кривой спроса на товар 1 будут другими. Положение и форма этих кривых, однако, всегда будут определяться свойствами отношения предпочтения потребителя.

Дополнительно будем предполагать, что если $u(\mathbf{x})$ дифференцируема, то для дальнейшей характеризации спроса можно будет воспользоваться методами математического анализа. Вспомним, что задача потребителя формулируется как

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n} u(\mathbf{x}) \text{ при } \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \le y. \tag{1-6}$$

Это задача нелинейного программирования с одним ограничением в форме неравенства. Как мы отмечали, ее решение $\mathbf{x}^*$ существует и единственно. Если мы перепишем ограничение как $y - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \ge 0$, а затем построим лагранжиан, то получим

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\ y) = u(\mathbf{x}) + \lambda[y - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}].$$

Предполагая, что решение $\mathbf{x}^*$ строго положительно, можно применить для его описания методы Куна — Таккера. Если $\mathbf{x}^* \gg \mathbf{0}$ является решением (1.6), то по теореме A2.20 существует $\lambda^* \ge 0$ такое, что $(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)$ удовлетворяют следующим условиям Куна — Таккера:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0,\ i = 1,\ \ldots, n, \tag{1-7}$$

$$y - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^* \ge 0, \tag{1-8}$$

$$\lambda^*[y - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^*] = 0. \tag{1-9}$$

По условию монотонности (1-8) должно выполняться как равенство, поэтому ограничение (1-9) становится избыточным. Следовательно, эти условия сводятся к таким:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} - \lambda^* p_1 = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} - \lambda^* p_n = 0, \tag{1-10}$$

$$y - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = 0.$$

Что это говорит нам о решении задачи (1-6)? Есть два варианта: либо $\nabla u(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, либо $\nabla u(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$. При монотонности первый вариант возможен, но весьма маловероятен. Поэтому мы просто предположим, что $\nabla u(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$. Тогда из условия монотонности $\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i > 0$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $p_i > 0$ для всех i, из (1-7) ясно, что в решении множитель Лагранжа будет строго положительным, так как $\lambda^* = u_i(\mathbf{x}^*)/p_i > 0$. Следовательно, для всех j $\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_j = \lambda^* p_j > 0$, т.е. для всех товаров в оптимуме предельная полезность пропорциональна цене. Иначе говоря, для любых двух товаров j и k мы получаем условие

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_j}{\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_k} = \frac{p_j}{p_k}. \tag{1-11}$$

Оно утверждает, что в оптимуме предельная норма замещения двух любых товаров должна быть равна отношению цен этих товаров. В случае двух товаров условия (1-10) требуют, чтобы наклон кривой безразличия, проходящей через точку $\mathbf{x}^*$, равнялся наклону бюджетного ограничения и чтобы точка $\mathbf{x}^*$ лежала на бюджетной линии, как на рис. 1.10 и 1.11(a).

Вообще говоря, условия (1.10) являются только необходимыми условиями локального оптимума (см. конец раздела A2.3). Однако для данной конкретной задачи эти необходимые условия первого порядка на самом деле являются и *достаточными* для глобального оптимума. Это утверждение заслуживает отдельной формулировки.

Теорема 1.4. Достаточность условий первого порядка для задачи потребителя.

Предположим, что $u(\mathbf{x})$ *непрерывна и квазивогнута на* $\mathbb{R}^n_+$ *и* $(\mathbf{p}, y) \gg \mathbf{0}$. *Если* $u(\mathbf{x})$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}^*$, *а* $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \gg \mathbf{0}$ *является решением (1-10), то* $\mathbf{x}^*$ *является решением задачи максимизации полезности потребителя при ценах* $\mathbf{p}$ *и доходе* y.

Доказательство. Воспользуемся следующим фактом, который приведем без доказательства: поскольку u квазивогнута и дифференцируема в точке $\mathbf{x}$, то $\nabla u(\mathbf{x})(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$ при условии, что $u(\mathbf{x}^1) \geq u(\mathbf{x})$.

Теперь предположим, что $\nabla u(\mathbf{x}^*)$ существует, а $(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*) >> \mathbf{0}$ является решением (1-10). Тогда

$$\nabla u(\mathbf{x}^*) = \lambda^* \mathbf{p}, \tag{P-1}$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = y. \tag{P-2}$$

Если $\mathbf{x}^*$ не максимизирует полезность, то должно существовать некоторое $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}$ такое, что

$$u(\mathbf{x}^0) > u(\mathbf{x}^*),$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^0 \leq y.$$

Поскольку u непрерывна и $y > 0$, из этих неравенств следует, что

$$u(t\mathbf{x}^0) > u(\mathbf{x}^*), \tag{P-3}$$

$$\mathbf{p} \cdot t\mathbf{x}^0 < y \tag{P-4}$$

для некоторого $t \in [0,\ 1]$, достаточно близкого к единице. Положив $\mathbf{x}^1 = t\mathbf{x}^0$, получаем

$$\begin{aligned} \nabla u(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*) &= (\lambda^* \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*) = \\ &= \lambda^*(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^1 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^*) < \\ &< \lambda^*(y - y) = \\ &= 0, \end{aligned} \tag{P-5}$$

где первое равенство следует из (P-1), а неравенство — из (P-2) и (P-4). Однако так как $u(\mathbf{x}^1) > u(\mathbf{x}^*)$ по (P-3), (P-5) противоречит утверждению, приведенному в начале доказательства. ■

Таким образом, на основе этого утверждения для нахождения решения задачи (1-6) достаточно найти решение $(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*) >> \mathbf{0}$ системы уравнений (1-10), системы из $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестной $x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda^*$. Обычно эти уравнения можно использовать для нахождения функций спроса $x_i(\mathbf{p},\ y)$, $i = 1,\ \ldots, n$, что мы и покажем на следующем примере.

Пример 1.1. Функция $u(x_1,\ x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$, где $0 \neq \rho < 1$ известна как ***функция полезности с постоянной эластичностью замещения (CES-функция)***. Легко проверить, что эта функция полезности описывает монотонные и строго выпуклые предпочтения.

Потребителю требуется найти неотрицательный потребительский набор, являющийся решением следующей задачи:

$$\max_{x_1, x_2}(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} \text{ при } y - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq 0. \tag{E-1}$$

Для этого выпишем соответствующий лагранжиан:

$$\mathcal{L}(x_1,\ x_2,\ \lambda) \equiv (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

Поскольку предпочтения монотонны, то в решении бюджетное ограничение будет выполняться как равенство. В предположении внутреннего решения условия Куна — Таккера совпадают с обычными условиями первого порядка для лагранжиана, поэтому для значений x_1, x_2, и λ, являющихся решениями, должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho - 1} x_1^{\rho - 1} - \lambda p_1 = 0, \tag{E-2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho - 1} x_2^{\rho - 1} - \lambda p_2 = 0, \tag{E-3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \tag{E-4}$$

Преобразовав (E-2) и (E-3), разделив одно на другое и снова преобразовав, мы сведем эти три уравнения с тремя неизвестными к двум уравнениям с двумя неизвестными x_1 и x_2, представляющими для нас особый интерес:

$$x_1 = x_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho - 1)}, \tag{E-5}$$

$$y = p_1 x_1 + p_2 x_2. \tag{E-6}$$

Сначала подставим x_1 из (E-5) в (E-6), чтобы получить уравнение относительно x_2:

$$y = p_1 x_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho - 1)} + p_2 x_2 = x_2 \left(p_1^{\rho/(\rho - 1)} + p_2^{\rho/(\rho - 1)}\right) p_2^{-1/(\rho - 1)}. \tag{E-7}$$

Выразив x_2 из (E-7), найдем решение:

$$x_2 = \frac{p_2^{1/(\rho - 1)} y}{\left(p_1^{\rho/(\rho - 1)} + p_2^{\rho/(\rho - 1)}\right)}. \tag{E-8}$$

Чтобы найти x_1, подставим (Е-8) в (Е-5) и получим

$$x_1 = \frac{p_1^{1/(\rho-1)} y}{(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)})}. \qquad \text{(Е-9)}$$

Равенства (Е-8) и (Е-9) — решения задачи потребителя (Е-1) — представляют собой маршалловские функции спроса. Определив параметр $r = \rho/(\rho-1)$, можно упростить (Е-8) и (Е-9) и записать их как

$$x_1(\mathbf{p},\ y) = \frac{p_1^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}, \qquad \text{(Е-10)}$$

$$x_2(\mathbf{p},\ y) = \frac{p_2^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}. \qquad \text{(Е-11)}$$

Отметим, что решения задачи потребителя зависят только от ее *параметров*, p_1, p_2 и y. При различных ценах и доходе (Е-10) и (Е-11) дадут различные объемы спроса на каждый товар. Проиллюстрируем проведенный анализ на рис. 1.12. При ценах p_1, $\overline{p}_2$ и доходе $\overline{y}$ решениями задачи потребителя будут указанные на рисунке объемы товаров x_1 и x_2. Пара $(p_1,\ x_1(p_1,\ \overline{p}_2,\ \overline{y}))$ будет точкой на (одной из) кривых спроса потребителя на товар x_1. □

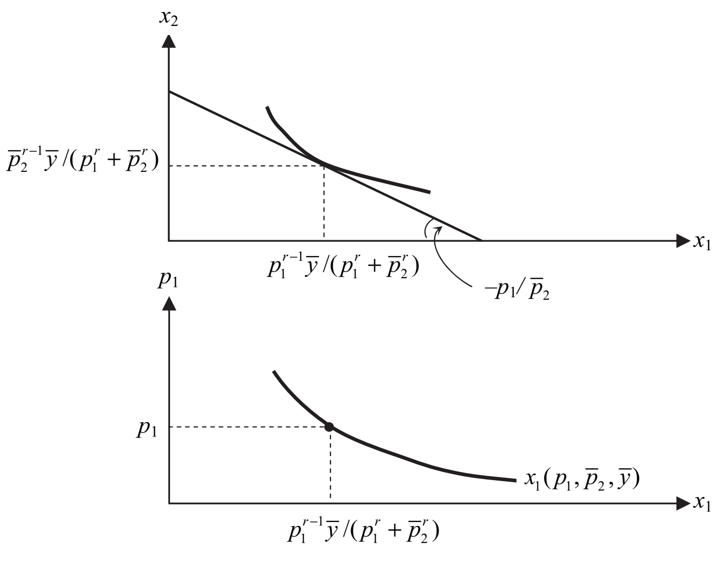


Рис. 1.12. Потребительский спрос в случае, когда предпочтения описываются CES-функцией полезности

В завершение несколько слов о свойствах функции спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$, выведенной из задачи максимизации полезности потребителя. Мы приняли достаточно предположений для того, чтобы гарантировать (по теореме о максимуме) непрерывность $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$ в $\mathbb{R}^n_{++}$. Мало того, нам хотелось бы рассмотреть наклон кривых спроса, а для этого требуется дифференцируемость $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$. С этого момента мы будем просто предполагать, что функция $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$ дифференцируема там, где это нужно. Но для того чтобы вы знали, за счет чего это достигается, мы сформулируем без доказательства следующий результат.

Теорема 1.5. Дифференцируемость функции спроса.

Пусть $\mathbf{x}^* \gg \mathbf{0}$ *является решением задачи максимизации полезности потребителя при ценах* $\mathbf{p}^0 \gg \mathbf{0}$ *и доходе* $y^0 > 0$. *Если*

- *и дважды непрерывно дифференцируема на* $\mathbb{R}^n_{++}$,
- $\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i > 0$ *для некоторого* $i = 1,\ \ldots, n$,
- *окаймленный гессиан и имеет ненулевой определитель в* $\mathbf{x}^*$,

то функция $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$ *дифференцируема в* $(\mathbf{p}^0,\ y^0)$.

1.4. Косвенная полезность и расходы

1.4.1. Косвенная функция полезности

Обычная функция полезности $u(\mathbf{x})$ определена на потребительском множестве X и напрямую представляет предпочтения потребителя. Поэтому она называется ***прямой функцией полезности***. При данных ценах $\mathbf{p}$ и доходе y потребитель выбирает набор $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$, максимизирующий его полезность. Уровень полезности, достигаемый при выборе $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$, будет наивысшим из всех, которые допускаются бюджетным ограничением потребителя при данных ценах $\mathbf{p}$ и доходе y. Различные цены или доход будут задавать различные бюджетные ограничения, что в общем случае повлияет на выбор потребителя и итоговый уровень полезности. Соотношение между ценами, доходом и значением полезности можно определить с помощью вещественнозначной функции $v: \mathbb{R}^n_{+} \times \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$v(\mathbf{p},\ y) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{+}} u(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \le y. \qquad (1\text{-}12)$$

Функция $v(\mathbf{p},\ y)$ называется ***косвенной функцией полезности***. Это функция максимального значения, соответствующая задаче максимизации полезности потребителя. Если $u(\mathbf{x})$ непрерывна, то $v(\mathbf{p},\ y)$ корректно определена для всех $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ и $y \geq 0$, поскольку гарантируется существование решения задачи (1-12). Если кроме того $u(\mathbf{x})$ строго квазивогнута, то решение единственно и записывается как $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$, т.е. как значение функции спроса потребителя. Максимально возможный уровень полезности, который может быть достигнут при ценах $\mathbf{p}$ и доходе y, будет, таким образом, достигаться при выборе $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$. Итак,

$$v(\mathbf{p},\ y) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)). \tag{1-13}$$

Геометрически можно представить, что $v(\mathbf{p},\ y)$ задает уровень полезности, соответствующий самой высокой кривой безразличия, достижимой потребителем при данных ценах $\mathbf{p}$ и доходе y, как изображено на рис. 1.13.

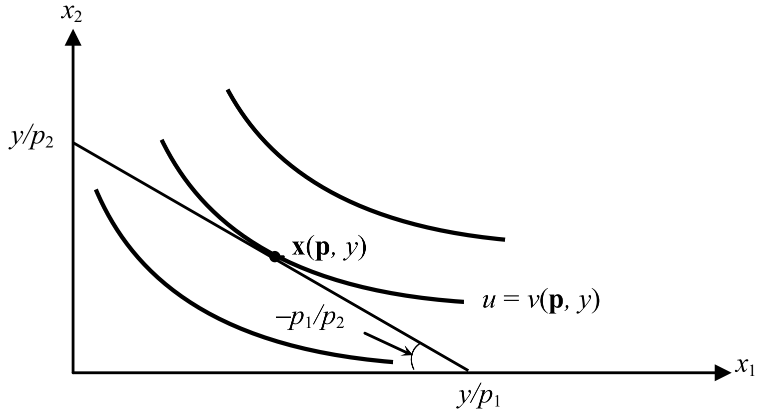


Рис. 1.13. Косвенная полезность при ценах $\mathbf{p}$ и доходе y

Косвенная функция полезности будет обладать несколькими свойствами. Непрерывности функции ограничения по $\mathbf{p}$ и y достаточно для того, чтобы обеспечить непрерывность $v(\mathbf{p},\ y)$ по $\mathbf{p}$ и y на $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$ (см. раздел А2.4). В сущности, непрерывность $v(\mathbf{p},\ y)$ следует из того факта, что при положительных ценах «малые изменения» любого из параметров $(\mathbf{p},\ y)$, определяющих положение бюджетного ограничения, приведут к «малым изменениям» максимального уровня полезности, достижимого потребителем. В следующей теореме мы сформулируем ряд других свойств $v(\mathbf{p},\ y)$.

Теорема 1.6. Свойства косвенной функции полезности[1]**.**

Если $u(\mathbf{x})$ *непрерывна и строго возрастает на* $\mathbb{R}^n_+$*, то функция* $v(\mathbf{p},\ y)$*, определенная в (1-12):*

1) непрерывна на $\mathbb{R}^n_{++}\times\mathbb{R}_+$;

2) однородна нулевой степени по $(\mathbf{p},\ y)$;

3) строго возрастает по y;

4) не возрастает по $\mathbf{p}$.

Кроме того она:

5) квазивыпукла по $(\mathbf{p},\ y)$;

6) удовлетворяет тождеству Роя: если $v(\mathbf{p},\ y)$ *дифференцируема в точке* $(\mathbf{p}^0,\ y^0)$ *и* $\partial v(\mathbf{p}^0,\ y^0)/\partial y \neq 0$*, то*

$$x_i(\mathbf{p}^0,\ y^0) = -\frac{\partial v(\mathbf{p}^0,\ y^0)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}^0,\ y^0)/\partial y},\ i = 1,\dots,n.$$

Доказательство. Свойство 1) следует из теоремы о максимуме, упомянутой в разделе А2.4. Вдаваться в детали мы не будем.

Второе свойство легко доказать. Требуется показать, что $v(\mathbf{p},\ y) = v(t\mathbf{p},\ ty)$ для всех $t>0$. Но $v(\mathbf{p},\ y) = [\max u(\mathbf{x})$ при $t\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\le ty]$, что, конечно, эквивалентно $[\max u(\mathbf{x})$ при $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\le y]$, потому что мы можем разделить обе стороны ограничения на $t>0$, не влияя на множество удовлетворяющих ему наборов (см. рис. 1.14). Следовательно, $v(t\mathbf{p},\ ty) = [\max u(\mathbf{x})$ при $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\le y] = v(\mathbf{p},\ y)$.

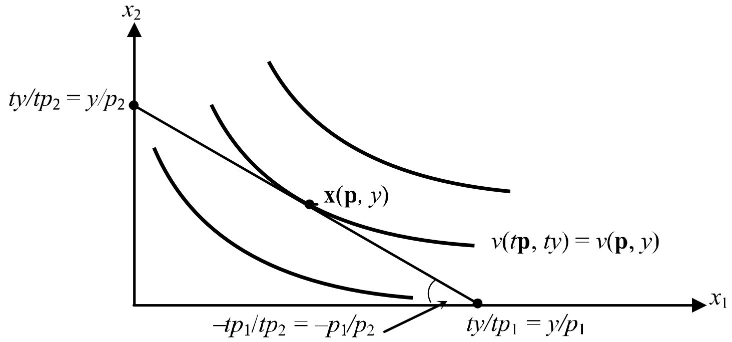


Рис. 1.14. Однородность косвенной функции полезности по ценам и доходу

---

[1] Эта теорема (как и многие последующие утверждения книги) остается справедливой и при более слабых предположениях, в частности при замене условия строгого возрастания функции полезности на условие ее локальной ненасыщаемости. Авторы представляют экспозицию теории в максимально упрощенном виде, избегая деталей, которые можно опустить при первом (серьезном) знакомстве с этой теорией. — *Примеч. ред.*

Интуитивный смысл свойств 3) и 4) заключается в том, что любое ослабление бюджетного ограничения потребителя никогда не приведет к снижению максимально достижимого уровня полезности, в то время как любое ужесточение бюджетного ограничения никогда не приведет к его повышению.

Чтобы доказать свойство 3) (и попрактиковаться в использовании метода Лагранжа), мы введем некоторые дополнительные предположения, хотя можно обойтись и без них. Для простоты предположим, что решение задачи (1-12) строго положительно и дифференцируемо, $(\mathbf{p},\ y) >> \mathbf{0}$, а функция $u(\cdot)$ дифференцируема, причем $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i > 0$ для всех $\mathbf{x} >> \mathbf{0}$.

Как мы отмечали выше, поскольку $u(\cdot)$ строго возрастает, ограничение в (1-12) в оптимуме должно выполняться как равенство. Следовательно, (1-12) эквивалентно задаче

$$v(\mathbf{p},\ y) = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \text{ при } \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = y\,. \tag{P-1}$$

Лагранжиан для (P-1) выглядит как

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\ \lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda(y - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\,. \tag{P-2}$$

Пусть $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$ является решением (P-1) для некоторого $(\mathbf{p},\ y) >> \mathbf{0}$. По нашему дополнительному предположению $\mathbf{x}^* >> \mathbf{0}$, поэтому можно применить теорему Лагранжа и прийти к заключению, что существует $\lambda^* \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0\,,\ i = 1,\ \ldots, n\,. \tag{P-3}$$

Заметим, что, поскольку и p_i, и $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i$ положительны, λ^* тоже положительно.

Дополнительные предположения о дифференцируемости позволяют нам применить теорему об огибающей (теорема A2.21), чтобы увидеть, что $v(\mathbf{p},\ y)$ строго возрастает по y. По теореме об огибающей частная производная функции $v(\mathbf{p},\ y)$ по y равна частной производной лагранжиана по y в точке $(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)$:

$$\frac{\partial v(\mathbf{p},\ y)}{\partial y} = \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)}{\partial y} = \lambda^* > 0\,. \tag{P-4}$$

Таким образом, $v(\mathbf{p},\ y)$ строго возрастает при $y > 0$, а значит, поскольку v непрерывна, она возрастает при $y \geq 0$.

Для свойства 4) также можно использовать теорему об огибающей. Однако мы приведем более элементарное доказательство, которое не задействует никакие дополнительные гипотезы. Рассмотрим $\mathbf{p}^0 \geq \mathbf{p}^1$, и пусть $\mathbf{x}^0$ является решением (1-12) при $\mathbf{p} = \mathbf{p}^0$. Поскольку $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}$, $(\mathbf{p}^0 - \mathbf{p}^1) \cdot \mathbf{x}^0 \geq 0$. Тогда $\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0 \leq \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0 \leq y$, так что $\mathbf{x}^0$ является допустимым набором для (1-12) при $\mathbf{p} = \mathbf{p}^1$. Можно заключить, что $v(\mathbf{p}^1,\ y) \geq u(\mathbf{x}^0) = v(\mathbf{p}^0,\ y)$, что и требовалось доказать.

Свойство 5) утверждает, что потребитель предпочтет одно из двух экстремальных бюджетных множеств любому их среднему. Нам нужно показать, что $v(\mathbf{p}, y)$ квазивыпукла по вектору цен и доходу $(\mathbf{p}, y)$.

Пусть B^1, B^2 и B^t представляют собой бюджетные множества при ценах и доходах соответственно $(\mathbf{p}^1,\ y^1)$, $(\mathbf{p}^2,\ y^2)$ и $(\mathbf{p}^t,\ y^t)$, где $\mathbf{p}^t \equiv t\mathbf{p}^1 + (1-t)\mathbf{p}^2$, а $y^t \equiv ty^1 + (1-t)y^2$. То есть

$$B^1 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x} \leq y^1\},$$

$$B^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x} \leq y^2\},$$

$$B^t = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x} \leq y^t\}.$$

Предположим, что любой выбор, который потребитель может сделать в бюджетном множестве B^t, мог также быть сделан либо в бюджетном множестве B^1, либо в бюджетном множестве B^2. Это значит, что любой уровень полезности, достижимый в бюджетном множестве B^t, мог быть достигнут либо в B^1, либо в B^2. Тогда, конечно, *максимальный* уровень полезности, достижимый в B^t, не может быть больше, чем максимальный уровень полезности, достижимый в B^1, или же максимальный уровень полезности, достижимый в B^2. Но если это так, то максимальная полезность, достижимая в множестве B^t, не может превышать *наибольшего* из этих уровней. Если наше предположение верно, то мы получаем, что

$$v(\mathbf{p}^t,\ y^t) \leq \max[v(\mathbf{p}^1,\ y^1),\ v(\mathbf{p}^2,\ y^2)] \quad \forall t \in [0,\ 1].$$

Это эквивалентно утверждению, что $v(\mathbf{p},\ y)$ квазивыпукла по $(\mathbf{p},\ y)$.

Теперь нам достаточно показать, что наше предположение о бюджетных множествах верно, т.е. что если $\mathbf{x} \in B^t$, то либо $\mathbf{x} \in B^1$, либо $\mathbf{x} \in B^2$ для всех $t \in [0,\ 1]$. Если в качестве t мы выберем одно из граничных значений, то B^t совпадет с B^1 или с B^2, и нужные соотношения будут тривиальными. Остается доказать, что они будут выполняться для всех $t \in (0,\ 1)$.

Предположим, что утверждение *неверно*. Тогда можно найти некоторое $t \in (0,\ 1)$ и $\mathbf{x} \in B^t$ такое, что $\mathbf{x} \notin B^1$ и $\mathbf{x} \notin B^2$. Но если $\mathbf{x} \notin B^1$ и $\mathbf{x} \notin B^2$, то

$$\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x} > y^1$$

и

$$\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x} > y^2$$

соответственно. Поскольку $t \in (0,\ 1)$, можно умножить первое неравенство на t, а второе — на $(1-t)$, что дает

$$t\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x} > ty^1$$

и

$$(1-t)\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x} > (1-t)y^2.$$

Сложив их, получим

$$(t\mathbf{p}^1 + (1-t)\mathbf{p}^2) \cdot \mathbf{x} > ty^1 + (1-t)y^2,$$

или

$$\mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x} > y^t.$$

Но из этого соотношения следует, что $\mathbf{x} \notin B^t$, а это противоречит исходному предположению. Поэтому мы делаем вывод о том, что если $\mathbf{x} \in B^t$, то $\mathbf{x} \in B^1$ или $\mathbf{x} \in B^2$ для всех $t \in [0,\ 1]$. Из предшествующих рассуждений можно заключить, что $v(\mathbf{p},\ y)$ квазивыпукла по $(\mathbf{p},\ y)$.

Наконец, обратимся к свойству 6), ***тождеству Роя***. Оно гласит, что маршалловский спрос потребителя на i-й товар равен отношению частных производных косвенной функции полезности по p_i и по y *с обратным знаком*. (Обратите внимание на знак «минус» в свойстве 6).)

Мы снова используем дополнительные предположения, введенные выше, поскольку еще раз обратимся к теореме об огибающей. (См. в упражнении 1.35 доказательство, которое не требует этих предположений.) В предположении, что $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$ — решение (1-12) — является строго положительным, как доказывалось выше, должно существовать λ^*, удовлетворяющее (P-3). Используя теорему об огибающей для нахождения $\partial v(\mathbf{p},\ y)/\partial p_i$, получим

$$\frac{\partial v(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)}{\partial p_i} = -\lambda^* x_i^*. \tag{P-5}$$

Однако по (Р-4) $\lambda^* = \partial v(\mathbf{p},\ y)/\partial y > 0$. Поэтому (Р-5) принимает вид

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p},\ y)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p},\ y)/\partial y} = x_i^* = x_i(\mathbf{p},\ y),$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 1.2. В примере 1.1 прямая функция полезности имела CES-форму, $u(x_1,\ x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$, где $0 \neq \rho < 1$. Мы нашли маршалловские функции спроса

$$x_1(\mathbf{p},\ y) = \frac{p_1^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}, \tag{Е-1}$$

$$x_2(\mathbf{p},\ y) = \frac{p_2^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}$$

при $r = \rho/(\rho - 1)$. По (1-13) мы можем построить косвенную функцию полезности, подставив их в прямую функцию полезности. После преобразований получаем

$$v(\mathbf{p},\ y) = [(x_1(\mathbf{p},\ y))^\rho + (x_2(\mathbf{p},\ y))^\rho]^{1/\rho} =$$

$$= \left[\left(\frac{p_1^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r} \right)^\rho + \left(\frac{p_2^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r} \right)^\text{r} \right]^{1/\rho} = \tag{Е-2}$$

$$= y \left[\frac{p_1^r + p_2^r}{(p_1^r + p_2^r)^\rho} \right]^{1/\rho} =$$

$$= y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}.$$

Нам нужно проверить, что (Е-2) удовлетворяет всем свойствам косвенной функции полезности, перечисленным в теореме 1.6. Легко видеть, что $v(\mathbf{p},\ y)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу, потому что для любого $t > 0$

$$v(t\mathbf{p},\ ty) = ty((tp_1)^r + (tp_2)^r)^{-1/r} =$$

$$= ty(t^r p_1^r + t^r p_2^r)^{-1/r} =$$

$$= tyt^{-1}(p_1^r + p_2^r)^{-1/r} =$$

$$= y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r} =$$

$$= v(\mathbf{p},\ y).$$

Чтобы убедиться в ее возрастании по y и убывании по $\mathbf{p}$, продифференцируем (E-2) по доходу и любой из цен:

$$\frac{\partial v(\mathbf{p},\ y)}{\partial y} = (p_1^r + p_2^r)^{-1/r} > 0\,, \qquad \text{(E-3)}$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_i} = -(p_1^r + p_2^r)^{(-1/r)-1}\, y p_i^{r-1} < 0\,,\ i = 1, 2\,. \qquad \text{(E-4)}$$

Для проверки выполнения тождества Роя поделим (E-4) на (E-3) и вспомним (E-1):

$$(-1)\frac{\partial v(\mathbf{p},\ y)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p},\ y)/\partial y} = (-1)\frac{-(p_1^r + p_2^r)^{(-1/r)-1}\, y p_i^{r-1}}{(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}} =$$

$$= \frac{y p_i^{r-1}}{p_1^r + p_2^r} = x_i(\mathbf{p},\ y)\,,\ i = 1, 2\,.$$

Доказательство квазивыпуклости (E-2) по $(\mathbf{p},\ y)$ мы оставляем в качестве упражнения. □

1.4.2. Функция расходов

Косвенная функция полезности дает эффективный способ описания поведения потребителя на рынке. Не менее нужным инструментом является ***функция расходов***. Чтобы построить косвенную функцию полезности, мы фиксировали рыночные цены и доход и искали максимальный уровень полезности, достижимый потребителем при этих ценах и доходе. Чтобы построить функцию расходов, мы фиксируем цены и уровень полезности и задаем другой вопрос: какой *минимальный объем денежных расходов* обеспечивает потребителю при данных ценах достижение заданного уровня полезности? При этом мы игнорируем любые ограничения, связанные с доходом потребителя, и просто спрашиваем: сколько потребителю придется потратить, чтобы получить некоторый уровень полезности?

Чтобы лучше понимать характер изучаемой проблемы, рассмотрим рис. 1.15 и сравним его с рис. 1.13. Каждая из параллельных прямых на рис. 1.15 изображает все наборы $\mathbf{x}$, для приобретения которых требуется один и тот же объем совокупных расходов при ценах $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$. Каждая из этих ***кривых постоянных расходов*** неявно задается уравнением $e = p_1 x_1 + p_2 x_2$ для различных объемов совокупных расходов $e > 0$. Таким образом, все они имеют одинаковый наклон — p_1/p_2, но пересекают горизонтальную и вертикальную оси в разных точках, соответственно, e/p_1 и

e/p_2. Кривые постоянных расходов, более удаленные от начала координат, содержат более дорогие наборы, менее удаленные — более дешевые наборы. Если зафиксировать уровень полезности u, то кривая безразличия $u(\mathbf{x}) = u$ даст все наборы, приносящие потребителю именно эту полезность.

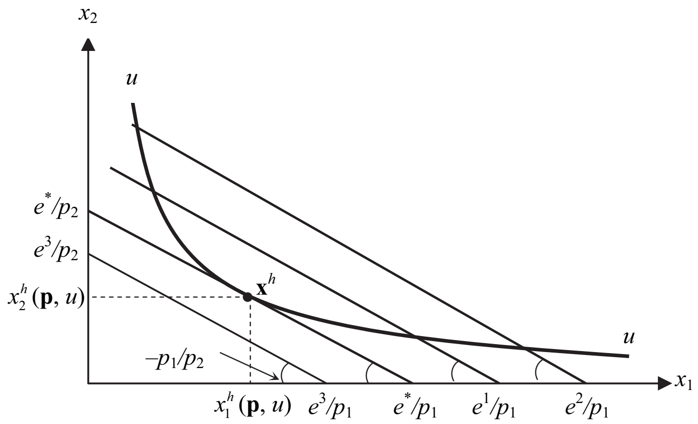


Рис. 1.15. Поиск наименьшего уровня расходов, необходимого для достижения уровня полезности u

Отсутствие общих точек у кривой постоянных расходов e^3 и кривой безразличия u указывает на то, что e^3 долларов при данных ценах недостаточно для того, чтобы достичь полезности u. Однако каждая из кривых e^1, e^2 и e^* имеет по крайней мере одну общую точку с u, и это значит, что любого из этих объемов расходов достаточно для того, чтобы потребитель получил полезность u. Для построения функции расходов нам нужен *минимальный объем расходов*, необходимый потребителю для достижения уровня полезности u, или самая низкая кривая постоянных расходов, которая имеет хотя бы одну общую точку с кривой безразличия u. Очевидно, что это будет объем расходов e^*, а самым дешевым набором, который обеспечивает полезность u при ценах $\mathbf{p}$, будет набор $\mathbf{x}^h = (x_1^h(\mathbf{p},\ u),\ x_2^h(\mathbf{p},\ u))$. Если обозначить минимальный объем расходов, необходимый для достижения полезности u при ценах $\mathbf{p}$, через $e(\mathbf{p},\ u)$, то он будет равен стоимости набора $\mathbf{x}^h$, т.е. $e(\mathbf{p},\ u) = p_1 x_1^h(\mathbf{p},\ u) + {}$ $+ p_2 x_2^h(\mathbf{p},\ u) = e^*$.

В общем виде функция расходов определяется как функция минимального значения

$$e(\mathbf{p},\ u) \equiv \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \quad \text{при} \quad u(\mathbf{x}) \geq u \tag{1-14}$$

для всех $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ и всех достижимых уровней полезности u. Для удобства обозначим множество достижимых уровней полезности как $\mathcal{U} = \{u(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+\}$. Таким образом, областью определения $e(\cdot)$ является множество $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathcal{U}$.

Заметим, что функция $e(\mathbf{p},\ u)$ корректно определена, поскольку при $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ имеет место $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq 0$. Следовательно, множество чисел $\{e \mid e = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ для некоторого $\mathbf{x}$, такого, что $u(\mathbf{x}) \geq u\}$, ограничено снизу нулем. Кроме того, поскольку $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, можно показать, что это множество замкнуто, а значит, содержит наименьший элемент. Значение $e(\mathbf{p},\ u)$ в точности равно этому наименьшему числу[1]. Заметим, что любое решение этой задачи минимизации будет неотрицательным и будет зависеть от параметров $\mathbf{p}$ и u. Заметим также, что если функция $u(\mathbf{x})$ непрерывна и строго квазивогнута, то решение будет единственным и его можно обозначить как функцию $\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u) \geq \mathbf{0}$. Как мы видели, если $\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u)$ является решением этой задачи, то наименьший объем расходов, необходимый для достижения полезности u при ценах $\mathbf{p}$ будет в точности равен стоимости набора $\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u)$, или

$$e(\mathbf{p},\ u) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u). \tag{1-15}$$

Мы видели, насколько тесно задача максимизации полезности потребителя связана с его наблюдаемым спросом на рынке. Точнее, сами решения этой задачи — маршалловские функции спроса — подсказывают, какое именно количество каждого товара потребитель будет реально покупать при различных ценах и доходе. Решение задачи минимизации расходов $\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u)$ мы будем интерпретировать как другой вид «функции спроса», но такой, который ненаблюдаем напрямую.

Проведем следующий мысленный эксперимент. Если зафиксировать полезность, которую может получить потребитель, на некотором произвольном уровне u, то как будет изменяться объем каждого из приобретаемых товаров при изменении цен? «Функции спроса», о которых идет речь, являются функциями спроса *с постоянной полезностью*. Мы полностью игнорируем объем денежных доходов потребителя и уровень полезности,

---

[1] Заметим, что $e(\mathbf{p},\ u) = \min \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ при $\mathbf{x} \in U_{\bar{\mathbf{x}}}$, где $U_{\bar{\mathbf{x}}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}\}$, а $\bar{\mathbf{x}}$ — любой потребительский набор такой, что $u(\bar{\mathbf{x}}) \geq u$. Формально: пусть $\bar{\mathbf{x}} \in U$ и $U_{\bar{\mathbf{x}}} = \{\mathbf{x} \in U \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}\}$. При этом $U_{\bar{\mathbf{x}}}$ — непустое компактное множество и $e(\mathbf{p},\ u) = \min \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ при $\mathbf{x} \in U_{\bar{\mathbf{x}}}$ для любого $\bar{\mathbf{x}}$ такого, что $u(\bar{\mathbf{x}}) \geq u$. — *Примеч. ред.*

которого он действительно *может* достичь. Нам известно, что если у потребителя имеется некоторый доход и происходит изменение цен, то объем его покупок, как правило, изменяется, как изменяется и уровень достигаемой им полезности. Чтобы представить, как нам построить наши гипотетические функции спроса, нужно вообразить процесс, при котором любое снижение цены и соответствующий прирост полезности потребителя компенсируются снижением его дохода и соответствующим снижением полезности до исходного уровня. Аналогично, увеличение одной из цен, приводящее к снижению полезности, должно быть компенсировано таким увеличением дохода, чтобы сопровождающий его прирост полезности был равен ее снижению. Поскольку в этом процессе любое изменение полезности, связанное с изменением цен, компенсируется изменением полезности за счет гипотетического изменения дохода, описываемые здесь гипотетические функции спроса часто называются функциями ***компенсированного спроса***. Первым в таком виде их описал Джон Хикс (1939), поэтому эти функции более известны как ***хиксовские функции спроса*** (функции спроса по Хиксу). Как мы покажем ниже, решение задачи минимизации расходов $\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u)$ в точности равно вектору спроса по Хиксу потребителя.

Чтобы прояснить эту идею, рассмотрим рис. 1.16. Если зафиксировать достижимую потребителем полезность на уровне u, как показано на рис. 1.16(а), и задать цены p_1^0 и p_2^0, то бюджетное ограничение будет иметь наклон — p_1^0 / p_2^0. Заметим, что максимизация полезности и минимизация расходов достигаются тогда в одной и той же точке с координатами $x_1^h(p_1^0, p_2^0, u)$ и $x_2^h(p_1^0, p_2^0, u)$. Если снизить цену товара 1 до $p_1^1 < p_1^0$, оставляя потребителя на кривой безразличия с уровнем полезности u, путем соответствующего снижения дохода, то новая бюджетная линия будет иметь наклон — p_1^1 / p_2^0, а точка, максимизирующая полезность, – координаты $x_1^h(p_1^1, p_2^0, u)$ и $x_2^h(p_1^1, p_2^0, u)$. Если зафиксировать цену p_2^0 и изобразить, как показано на рис. 1.16(б), цены товара 1 и соответствующие гипотетические количества товара 1, которые потребитель «приобретет» при этих ценах, при условии, что если его полезность ограничена уровнем u, то получится «псевдокривая спроса». Это построение и есть кривая спроса по Хиксу на товар 1 при уровне полезности u. Очевидно, что кривые спроса по Хиксу будут *различными* для разных уровней полезности, т.е. для разных кривых безразличия. Форма и положения каждой из них при этом будут определяться потребительскими предпочтениями.

Короче говоря, решение задачи минимизации расходов $\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u)$ — это в точности вектор спроса по Хиксу, так как каждое из гипотетических «бюджетных ограничений» потребителя, представленных на рис. 1.16, соответствует минимальному объему расходов, необходимому для достижения заданного уровня полезности при данных ценах.

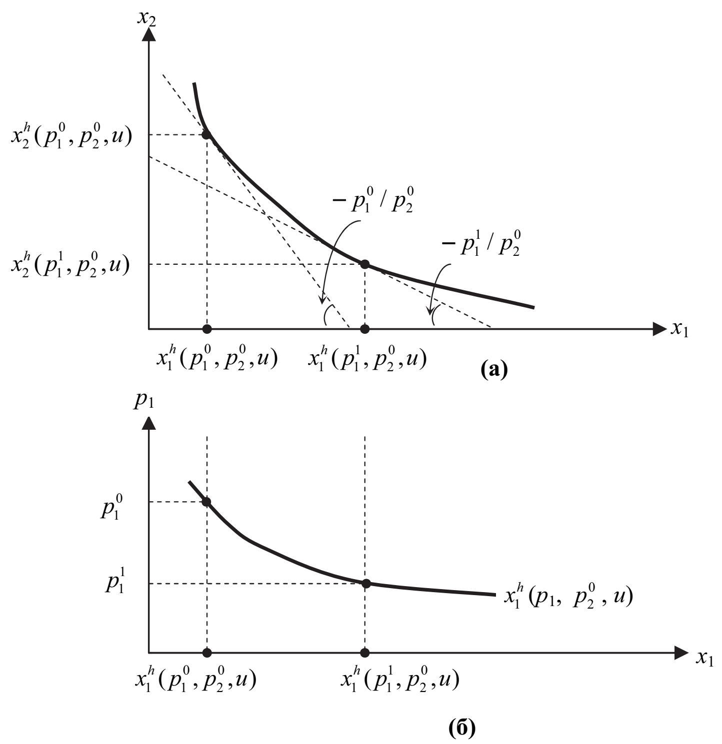


Рис. 1.16. Хиксовский спрос на товар 1

Таким образом, функция расходов, определенная в (1-14), содержит важную информацию о спросе по Хиксу. Хотя ее аналитическая ценность станет очевидной немного позднее, здесь можно обратить внимание на ту легкость, с которой эта информация из нее извлекается: спрос по Хиксу можно получить из функции расходов простым дифференцированием. Это и другие важные свойства функции расходов детализированы в следующей теореме.

Теорема 1.7. Свойства функции расходов.

Если функция $u(\cdot)$ *непрерывна и строго возрастает, то функция* $e(\mathbf{p},\ u)$*, определенная в (1-14), обладает следующими свойствами:*

1) равна нулю, когда $u(\cdot)$ *принимает наименьшее значение из множества* $\mathcal{U}$;

2) непрерывна на множестве определения $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathcal{U}$;

3) для всех $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ *строго возрастает и не ограничена сверху по* u;

4) возрастает по $\mathbf{p}$;

5) однородна первой степени по $\mathbf{p}$;

6) вогнута по $\mathbf{p}$.

Если, кроме того, $u(\cdot)$ *квазивогнута, то выполняется:*

7) лемма Шепарда: $e(\mathbf{p}, u)$ *дифференцируема по* $\mathbf{p}$ *в точке* $(\mathbf{p}^0,\ u^0)$, $\mathbf{p}^0 \gg \mathbf{0}$, *и*

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}^0,\ u^0)}{\partial p_i} = x_i^h(\mathbf{p}^0,\ u^0),\ \ i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Для доказательства свойства 1) заметим, что наименьшее значение в множестве $\mathcal{U}$ равно $u(\mathbf{0})$, потому что $u(\cdot)$ строго возрастает в $\mathbb{R}^n_+$. Следовательно, $e(\mathbf{p},\ u(\mathbf{0})) = 0$, так как при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уровень полезности $u(\mathbf{0})$ достигается при объеме расходов, равном $\mathbf{p} \cdot \mathbf{0} = 0$.

Свойство 2) — непрерывность — снова следует из теоремы о максимуме.

Хотя свойство 3) выполняется и без дальнейших предположений, мы удовлетворимся его доказательством при дополнительных гипотезах о том, что $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u) \gg \mathbf{0}$ и дифференцируема $\forall \mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, $u > u(\mathbf{0})$ и что $u(\cdot)$ дифференцируема, причем $\partial u(\mathbf{x}) / \partial x_i > 0$, $\forall i$ на $\mathbb{R}^n_{++}$.

Функция $u(\cdot)$ непрерывна, строго возрастает и $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, поэтому ограничение в (1-14) должно выполняться как равенство, так как если $u(\mathbf{x}^1) > u$, то найдется такое $t \in (0, 1)$, достаточно близкое к 1, что $u(t\mathbf{x}^1) > u$. Далее, $u \ge u(\mathbf{0})$ означает, что $u(\mathbf{x}^1) > u(\mathbf{0})$, поэтому $\mathbf{x}^1 \ne \mathbf{0}$. Таким образом, поскольку $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^1 > 0$, $\mathbf{p} \cdot (t\mathbf{x}^1) < \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^1$. Следовательно, если ограничение не выполняется как равенство, то найдется более дешевый набор, который также будет удовлетворять этому ограничению. Поэтому в оптимуме ограничение должно выполняться как равенство, и (1-14) можно записать как

$$e(\mathbf{p},\ u) \equiv \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \ \text{ при } u(\mathbf{x}) = u. \qquad \text{(P-1)}$$

Лагранжиан для этой задачи:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\ \lambda) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \lambda[u - u(\mathbf{x})]. \qquad \text{(P-2)}$$

При $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ и $u > u(\mathbf{0})$ решением (P-1) является $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u) \gg \mathbf{0}$ (по предположению). Поэтому по теореме Лагранжа существует такое λ^*, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)}{\partial x_i} = p_i - \lambda^* \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0\,,\ i = 1,\ldots,n\,. \tag{P-3}$$

Заметим, что p_i и $\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i$ положительны, поэтому λ^* тоже положительно. При наших дополнительных предположениях можно применить теорему об огибающей, для того чтобы показать, что $e(\mathbf{p},\ u)$ строго возрастает по u.

По теореме об огибающей частная производная функции минимального значения $e(\mathbf{p},\ u)$ по u равна частной производной лагранжиана по u в точке $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$. Отсюда

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\ u)}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)}{\partial u} = \lambda^* > 0\,.$$

Поскольку это верно для всех $u > u(\mathbf{0})$ и поскольку $e(\cdot)$ непрерывна, можно сделать вывод о том, что для всех $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ функция $e(\mathbf{p},\ u)$ строго возрастает по u на множестве $\mathcal{U}$, которое включает $u(\mathbf{0})$.

Можно показать, что неограниченность e по u следует из непрерывности и строгого возрастания $u(\mathbf{x})$. В упражнении 1.33 вам предлагается это проделать.

Свойство 4) следует из свойства 7), поэтому мы вернемся к нему чуть позже. Доказательство свойства 5) будет оставлено в качестве упражнения.

В свойстве 6) необходимо доказать, что $e(\mathbf{p},\ u)$ является вогнутой функцией цен. Для начала вспомним определение вогнутости. Пусть $\mathbf{p}^1$ и $\mathbf{p}^2$ — некоторые положительные векторы цен, $t \in [0,\ 1]$, и $\mathbf{p}^t = t\mathbf{p}^1 + (1-t)\mathbf{p}^2$ является любой выпуклой комбинацией $\mathbf{p}^1$ и $\mathbf{p}^2$. Тогда функция расходов будет вогнутой по ценам, если

$$te(\mathbf{p}^1,\ u) + (1-t)e(\mathbf{p}^2,\ u) \le e(\mathbf{p}^t,\ u)\,. \tag{P-5}$$

Чтобы убедиться в том, что это свойство имеет место, посмотрим, что *означает* минимизация расходов при заданных ценах. Предположим, что набор $\mathbf{x}^1$ минимизирует расходы, необходимые для достижения уровня полезности u при ценах $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{x}^2$ минимизирует эти расходы при ценах $\mathbf{p}^2$, а $\mathbf{x}^*$ – при ценах $\mathbf{p}^t$. Тогда стоимость $\mathbf{x}^1$ при ценах $\mathbf{p}^1$ не должна превышать стоимости при ценах $\mathbf{p}^1$ *любого другого* набора $\mathbf{x}$, который позволяет получить полезность u. Аналогично стоимость набора $\mathbf{x}^2$ при ценах $\mathbf{p}^2$ не должна превышать стоимости при ценах $\mathbf{p}^2$ *любого другого* набора $\mathbf{x}$, который позволяет получить ту же полезность u. Если, как мы сказали, соотношения

$$\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 \le \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}$$

и

$$\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x}^2 \le \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x}$$

имеют место для всех $\mathbf{x}$, позволяющих достичь полезности u, то эти соотношения должны *также* выполняться и для $\mathbf{x}^*$, поскольку $\mathbf{x}^*$ позволяет получить полезность u. Таким образом,

$$\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 \le \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^*$$

и

$$\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x}^2 \le \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x}^*.$$

Поскольку $t \ge 0$ и $(1-t) \ge 0$, мы можем умножить первое из этих неравенств на t, второе — на $(1-t)$ и сложить их. Использовав определение $\mathbf{p}^t$, получим неравенство

$$t\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x}^2 \le \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^*.$$

Левая часть является выпуклой комбинацией минимальных расходов, необходимых для достижения полезности u при ценах $\mathbf{p}^1$ и $\mathbf{p}^2$, а правая часть представляет собой минимальные расходы, необходимые для достижения полезности u при ценах, являющихся выпуклой комбинацией $\mathbf{p}^1$ и $\mathbf{p}^2$. Иными словами, это в точности то же самое, что (Р-5), т.е.

$$te(\mathbf{p}^1,\ u) + (1-t)e(\mathbf{p}^2,\ u) \le e(\mathbf{p}^t,\ u) \quad \forall t \in [0,\ 1]$$

то, что мы и намеревались показать.

Для доказательства свойства 7) снова обратимся к теореме об огибающей, но дифференцировать будем по p_i. Это дает

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\ \lambda^*)}{\partial p_i} = x_i^* \equiv x_i^h(\mathbf{p},\ u),$$

что и требовалось доказать. Поскольку $\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u) \ge \mathbf{0}$, это также доказывает свойство 4). (См. в упражнении 1.36 доказательство свойства 7), не требующее никаких дополнительных предположений. Попытайтесь самостоятельно доказать свойство 4) без дополнительных предположений.) ■

Пример 1.3. Снова предположим, что прямая функция полезности имеет CES-форму, $u(x_1,\ x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$, где $0 \ne \rho < 1$. Выведем соответствующую функцию расходов для этого случая. Поскольку предпочтения монотонны, можно сформулировать задачу минимизации расходов (1-15) в виде

$$\min_{x_i, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \text{ при } u - (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} = 0, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

Ее лагранжиан

$$\mathcal{L}(x_1, \ x_2, \ \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda[u - (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}]. \tag{E-1}$$

В предположении внутреннего решения для обоих товаров оптимальные значения x_1, x_2 и λ должны удовлетворять следующим условиям первого порядка:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1} = 0, \tag{E-2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_2^{\rho-1} = 0, \tag{E-3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u - (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} = 0. \tag{E-4}$$

Исключив λ, их можно свести к двум уравнениям с двумя неизвестными:

$$x_1 = x_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)}, \tag{E-5}$$

$$u = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}. \tag{E-6}$$

Подставив (E-5) в (E-6), получим

$$u = \left[x_2^\rho \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\rho/(\rho-1)} + x_2^\rho\right]^{1/\rho} = x_2 \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\rho/(\rho-1)} + 1\right]^{1/\rho}.$$

Выразим отсюда x_2 и, положив $r \equiv \rho/(\rho-1)$, найдем

$$x_2 = u\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\rho/(\rho-1)} \cdot x_2^\rho + 1\right]^{-1/\rho} = u[p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}]^{-1/\rho} p_2^{1/(\rho-1)} = \tag{E-7}$$

$$= u(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_2^{r-1}.$$

Подстановка (E-7) в (E-5) дает

$$x_1 = u p_1^{1/(\rho-1)} p_2^{-1/(\rho-1)} (p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_2^{r-1} = \tag{E-8}$$

$$= u(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_1^{r-1}.$$

Решения (E-7) и (E-8) зависят от параметров задачи минимизации, величин $\mathbf{p}$ и u. Это хиксовские функции спроса, поэтому обозначим (E-7) и (E-8) как

$$x_1^h(\mathbf{p},\ u) = u(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_1^{r-1}, \tag{E-9}$$

$$x_2^h(\mathbf{p},\ u) = u(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_2^{r-1}. \tag{E-10}$$

Чтобы построить функцию расходов, воспользуемся уравнением (1-15) и подставим (E-9) и (E-10) в целевую функцию (E-1):

$$\begin{aligned} e(\mathbf{p},u) &= p_1 x_1^h(\mathbf{p},u) + p_2 x_2^h(\mathbf{p},u) = \\ &= up_1(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_1^{r-1} + up_2(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} p_2^{r-1} = \\ &= u(p_1^r + p_2^r)(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1} = \\ &= u(p_1^r + p_2^r)^{1/r}. \end{aligned} \tag{E-11}$$

Выражение (E-11) представляет собой искомую функцию расходов. Доказательство наличия у нее обычных свойств мы оставляем в качестве упражнения. □

1.4.3. Связь между косвенной функцией полезности и функцией расходов

Хотя косвенная функция полезности и функция расходов концептуально различны, между ними, очевидно, существует тесная связь. То же самое можно сказать о функциях спроса по Маршаллу и Хиксу.

В частности, зафиксируем $(\mathbf{p},\ y)$ и положим $u = v(\mathbf{p},\ y)$. По определению функции v это означает, что при ценах $\mathbf{p}$ уровень полезности u является максимально достижимым, если доход потребителя равен y. Следовательно, если бы при ценах $\mathbf{p}$ потребитель хотел достичь уровня полезности не ниже, чем u, то доход y позволил бы ему сделать это. Но вспомним, что $e(\mathbf{p},\ u)$ — это *минимальный* объем расходов, необходимый для того, чтобы достичь уровня полезности не ниже u. Тогда $e(\mathbf{p},\ u) \le y$. Следовательно, определения функций v и e приводят нас к неравенству

$$e(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y)) \le y,\ \forall(\mathbf{p}, y) >> \mathbf{0}. \tag{1-16}$$

Далее, зафиксируем $(\mathbf{p},\ u)$ и положим $y = e(\mathbf{p},\ u)$. По определению функции e это означает, что при ценах $\mathbf{p}$ доход y — это наименьший доход, который позволяет потребителю достичь уровня полезности не ниже u. Следовательно, если бы при ценах $\mathbf{p}$ доход потребителя составлял y, то он мог бы достичь уровня полезности не ниже u. Но поскольку $v(\mathbf{p},\ y)$ является *максимальным* уровнем полезности, достижимым при ценах $\mathbf{p}$ и доходе y, отсюда следует, что $v(\mathbf{p},\ y) \geq u$. Таким образом, определения функций v и e также означают, что

$$v(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u)) \geq u,\ \forall (\mathbf{p},\ u) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathcal{U}. \tag{1-17}$$

Следующая теорема показывает, что при некоторых уже знакомых нам условиях относительно предпочтений оба эти неравенства на самом деле должны выполняться как равенства.

Теорема 1.8. Связь между косвенной функцией полезности и функцией расходов.

Пусть $v(\mathbf{p},\ y)$ *и* $e(\mathbf{p},\ u)$ *являются косвенной функцией полезности и функцией расходов для некоторого потребителя, функция полезности которого непрерывна и строго возрастает. Тогда для всех* $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, $y \geq 0$ *и* $u \in \mathcal{U}$:

1) $e(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y)) = y$;

2) $v(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u)) = u$.

Доказательство. Поскольку $u(\cdot)$ строго возрастает на $\mathbb{R}^n_+$, она достигает минимума в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, но не достигает максимума. Кроме того, так как $u(\cdot)$ непрерывна, множество $\mathcal{U}$ достижимых значений полезности должно представлять собой интервал. Следовательно, $\mathcal{U} = [u(\mathbf{0}), \bar{u}]$ при $\bar{u} > u(\mathbf{0})$, где $\bar{u}$ может быть конечным или стремиться к $+\infty$.

Для доказательства первого утверждения возьмем $(\mathbf{p},\ y) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$. По (1-16) $e(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y)) \leq y$. Нам нужно показать, что на самом деле выполняется равенство. Предположим обратное, т.е. что $e(\mathbf{p},\ u) < y$, где $u = v(\mathbf{p},\ y)$. Заметим, что по определению $v(\cdot)$ $u \in \mathcal{U}$, так что $u < \bar{u}$. По непрерывности $e(\cdot)$ (теорема 1.7) можно выбрать такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что $u + \varepsilon < \bar{u}$ и $e(\mathbf{p},\ u+\varepsilon) < y$. Пусть $y_\varepsilon = e(\mathbf{p},\ u+\varepsilon)$, тогда из (1-17) следует, что $v(\mathbf{p},\ y_\varepsilon) \geq u + \varepsilon$. Поскольку $y_\varepsilon < y$, а v строго возрастает по доходу по теореме 1.6, $v(\mathbf{p},\ y) > v(\mathbf{p},\ y_\varepsilon) \geq u + \varepsilon$. Но $u = v(\mathbf{p},\ y)$, так что мы получаем противоречие: $u \geq u + \varepsilon$. Таким образом, $e(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y)) = y$[1].

[1] По-видимому, это тот случай, когда дополнительные предположения, скорее, усложняют доказательство. — *Примеч. ред.*

Для доказательства второго утверждения возьмем $(\mathbf{p},\ u) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \times [u(\mathbf{0}),\ \bar{u}]$. По (1-17) $v(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u)) \geq u$. Чтобы показать, что (1-17) выполняется как равенство, снова предположим обратное, т.е. что $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) > u$. Нужно рассмотреть два случая: $u = u(\mathbf{0})$ и $u > u(\mathbf{0})$. Мы разберем только второй из них, оставив первый в качестве упражнения. Положив $y = e(\mathbf{p},\ u)$, получим $v(\mathbf{p},\ y) > u$. Поскольку $e(\mathbf{p},\ u(\mathbf{0})) = 0$, а $e(\cdot)$ строго возрастает по полезности (теорема 1.7), $y = e(\mathbf{p},\ u) > 0$. Так как $v(\cdot)$ непрерывна по теореме 1.6, можно выбрать такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что $y - \varepsilon > 0$ и $v(\mathbf{p},\ y - \varepsilon) > u$. Таким образом, при ценах $\mathbf{p}$ доход $y - \varepsilon$ является достаточным для достижения уровня полезности, превышающего u. Поэтому должно выполняться неравенство $e(\mathbf{p},\ u) \leq y - \varepsilon$, а это противоречит тому факту, что $y = e(\mathbf{p},\ u)$. ■

До сих пор, если мы хотели вывести функции косвенной полезности и расходов потребителя, нам приходилось решать две отдельные задачи условной оптимизации: задачу на максимум и задачу на минимум. Данная теорема указывает простой путь, как получить одну из этих функций, зная другую, т.е. теперь достаточно будет решить только одну оптимизационную задачу, причем не важно, какую именно.

Чтобы посмотреть, как это работает, предположим, что задача максимизации полезности решена и косвенная функция полезности построена. Одно из известных нам свойств косвенной функции полезности — *строгое возрастание* по доходу. Но тогда, если считать цены постоянными и рассматривать ее только как функцию от дохода, для нее будет существовать *обратная* функция по доходу. Имея

$$v(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u)) = u,$$

мы можем применить эту обратную функцию (обозначим ее $v^{-1}(\mathbf{p} : t)$) к обеим частям данного равенства, откуда

$$e(\mathbf{p},\ u) = v^{-1}(\mathbf{p} : u). \tag{1-18}$$

Что бы ни стояло в правой части равенства (1-18), нам известно, что оно будет в точности совпадать с выражением для функции расходов потребителя — выражением, которое мы бы в конечном счете получили, решив задачу минимизации расходов и подставив результат в целевую функцию.

Предположим теперь, что мы решили задачу минимизации расходов и построили функцию расходов $e(\mathbf{p},\ u)$. Мы знаем, что $e(\mathbf{p},\ u)$ *строго возрастает* по u. В предположении о постоянных ценах для нее существует обратная функция по полезности, которую мы можем обозначить $e^{-1}(\mathbf{p}:t)$. Применив ее к обеим частям первого соотношения теоремы 1.8, мы увидим, что косвенная функция полезности будет равна обратной функции расходов по полезности при любом уровне дохода y:

$$v(\mathbf{p},\ y) = e^{-1}(\mathbf{p} : y)\,. \tag{1-19}$$

Равенства (1-18) и (1-19) снова иллюстрируют тесную связь между максимизацией полезности и минимизацией расходов. Концептуально это две стороны одной медали, а математически — косвенная функция полезности и функция расходов являются (соответствующим образом подобранными) *обратными* функциями по отношению друг к другу.

Пример 1.4. Эту технику можно продемонстрировать на основе результатов предыдущих примеров. В примере 1.2 мы обнаружили, что прямая CES-функция полезности порождает косвенную функцию полезности вида

$$v(\mathbf{p},\ y) = y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r} \tag{E-1}$$

для любых цен $\mathbf{p}$ и уровня дохода y. Таким образом, для дохода, равного $e(\mathbf{p},\ u)$ долларов, должно выполняться следующее равенство:

$$v(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u)) = e(\mathbf{p},\ u)(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}\,. \tag{E-2}$$

Далее, из второго утверждения теоремы 1.8 нам известно, что для любых $\mathbf{p}$ и u

$$v(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u)) = u\,. \tag{E-3}$$

(E-2) и (E-3) вместе дают

$$e(\mathbf{p},\ u)(p_1^r + p_2^r)^{-1/r} = u\,. \tag{E-4}$$

Найдя отсюда $e(\mathbf{p},\ u)$, получаем выражение

$$e(\mathbf{p},\ u) = u(p_1^r + p_2^r)^{1/r} \tag{E-5}$$

для функции расходов. Пример 1.3 подтверждает, что это в точности то же самое выражение, которое было получено напрямую путем решения задачи минимизации расходов потребителя.

Предположим теперь, что мы знаем функцию расходов и хотим вывести косвенную функцию полезности. Для прямой CES-функции полезности нам известно из примера 1.3, что

$$e(\mathbf{p},\ u) = u(p_1^r + p_2^r)^{1/r} \tag{E-6}$$

для любых цен $\mathbf{p}$ и уровня полезности u. Тогда для уровня полезности $v(\mathbf{p},\ y)$ мы получим

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, y) = v(\mathbf{p}, y)(p_1^r + p_2^r)^{1/r}. \tag{E-7}$$

Из первого утверждения теоремы 1.8, для любых $\mathbf{p}$ и y

$$e(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y)) = y. \tag{E-8}$$

Из (E-7) и (E-8) получаем

$$v(\mathbf{p},\ y)(p_1^r + p_2^r)^{1/r} = y. \tag{E-9}$$

Решая (E-9), находим выражение для косвенной функции полезности:

$$v(\mathbf{p},\ y) = y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}. \tag{E-10}$$

С помощью примера 1.2 можно проверить, что (E-10) совпадает с тем выражением, которое было найдено напрямую путем решения задачи максимизации полезности потребителя. □

Изучим взаимоотношения между максимизацией полезности и минимизацией расходов чуть глубже, обратив внимание на *решения* соответствующих задач. Решения задачи максимизации полезности — это функции спроса по Маршаллу, а решения задачи минимизации расходов — это функции спроса по Хиксу. Учитывая тесную связь между самими задачами, естественно предположить наличие тесной связи между их решениями. Следующая теорема проясняет связь между спросом по Маршаллу и спросом по Хиксу.

Теорема 1.9. Двойственность между функциями спроса по Маршаллу и по Хиксу.

По предположению 1.2 при $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, $y \geq 0$, $u \in \mathcal{U}$ *и* $i = 1,\ldots,n$ *между функциями спроса по Маршаллу и по Хиксу выполняются следующие соотношения:*

1) $x_i(\mathbf{p},\ y) = x_i^h(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y))$.

2) $x_i^h(\mathbf{p},\ u) = x_i(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u))$.

Первое соотношение означает, что маршалловский спрос при ценах $\mathbf{p}$ и доходе y равен хиксовскому спросу при ценах $\mathbf{p}$ и максимальном уровне полезности, достижимом при ценах $\mathbf{p}$ и доходе y. Второе гласит, что хиксовский спрос при любых ценах $\mathbf{p}$ и уровне полезности u совпадает с маршалловским спросом при тех же ценах и доходе, равном минимальным расходам, необходимым при этих ценах для достижения уровня полезности u.

Другими словами, теорема 1.9 утверждает, что решения задачи (1-12) являются решениями задачи (1-14), и наоборот. Точнее, если $\mathbf{x}^*$ является решением задачи (1-12) при $(\mathbf{p}, y)$, то согласно данной теореме $\mathbf{x}^*$ является решением задачи (1-14) при $(\mathbf{p}, u)$, где $u = u(\mathbf{x}^*)$. Наоборот, если $\mathbf{x}^*$ является решением (1-14) при $(\mathbf{p}, u)$, то $\mathbf{x}^*$ является решением (1-12) при $(\mathbf{p}, y)$, где $y = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^*$. Теорема проиллюстрирована на рис. 1.17, из которого ясно, что $\mathbf{x}^*$ может рассматриваться либо как решение задачи (1-12), либо как решение задачи (1-14), и именно в этом смысле $\mathbf{x}^*$ обладает *двойственной* природой.

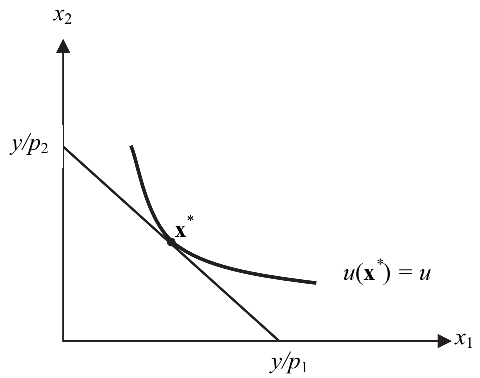


Рис. 1.17. Минимизация расходов и максимизация полезности

Доказательство. Мы докажем, что выполняется первое соотношение, оставляя доказательство второго в качестве упражнения.

Заметим, что по предположению 1-2 функция $u(\cdot)$ непрерывна и строго квазивогнута, поэтому решения задач (1-12) и (1-14) существуют и единственны. Следовательно, функции спроса по Маршаллу и по Хиксу определены корректно.

Для доказательства первого соотношения положим $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(\mathbf{p}^0,\ y^0)$ и $u^0 = u(\mathbf{x}^0)$. Тогда $v(\mathbf{p}^0,\ y^0) = u^0$ по определению функции $v(\cdot)$, а $\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0 = y^0$ в силу строгого возрастания $u(\cdot)$ по предположению 1-2. По теореме 1.8 $e(\mathbf{p}^0,\ v(\mathbf{p}^0,\ y^0)) = y^0$, или, что то же самое, $e(\mathbf{p}^0,\ u^0) = y^0$. Но так как $u(\mathbf{x}^0) = u^0$ и $\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0 = y^0$, то $\mathbf{x}^0$ является решением (1-14) при $(\mathbf{p},\ u) = (\mathbf{p}^0,\ u^0)$. Таким образом, $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}^0,\ u^0)$, т.е. $\mathbf{x}(\mathbf{p}^0,\ y^0) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}^0,\ v(\mathbf{p}^0,\ y^0))$. ■

Пример 1.5. Подтвердим утверждение теоремы 1.9 для потребителя с CES-функцией полезности. Как было показано ранее (пример 1.3), функции спроса по Хиксу равны

$$x_i^h(\mathbf{p},\ u) = u(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1}\, p_i^{r-1},\ i = 1, 2. \tag{E-1}$$

Косвенная функция полезности (пример 1.2) имеет вид

$$v(\mathbf{p},\ y) = y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}. \tag{E-2}$$

Подставляя (E-2) вместо u в (E-1), получаем

$$\begin{aligned} x_i^h(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y)) &= v(\mathbf{p},\ y)(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1}\, p_i^{r-1} = \\ &= y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1}\, p_i^{r-1} = \\ &= yp_i^{r-1}(p_1^r + p_2^r)^{-1} = \\ &= \frac{yp_i^{r-1}}{p_1^r + p_2^r},\ i = 1, 2. \end{aligned} \tag{E-3}$$

Последнее выражение в правой части (E-3) представляет собой функции спроса по Маршаллу, выведенные нами в примере 1.1 напрямую путем решения задачи максимизации полезности потребителя, что подтверждает первое соотношение теоремы 1.9.

Чтобы подтвердить второе соотношение, возьмем функции спроса по Маршаллу (пример 1.1)

$$x_i(\mathbf{p},\ y) = \frac{yp_i^{r-1}}{p_1^r + p_2^r},\ i = 1, 2, \tag{E-4}$$

и функцию расходов (пример 1.3)

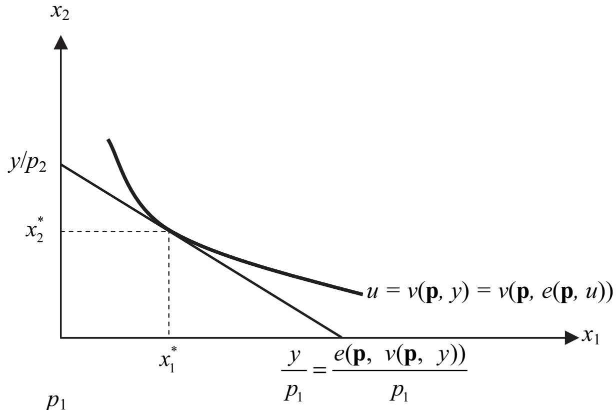
$$e(\mathbf{p},\ u) = u(p_1^r + p_2^r)^{1/r}. \tag{E-5}$$

Подставляя (E-5) вместо y в (E-4), находим

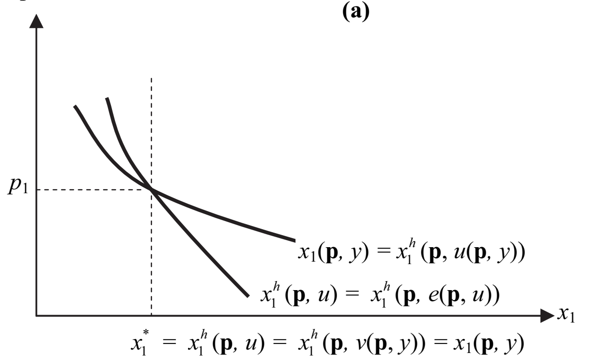
$$\begin{aligned} x_i(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u)) &= \frac{e(\mathbf{p},\ u)\, p_i^{r-1}}{p_1^r + p_2^r} = \\ &= u(p_1^r + p_2^r)^{1/r}\, \frac{p_i^{r-1}}{p_1^r + p_2^r} = \\ &= up_i^{r-1}(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1},\ i = 1, 2. \end{aligned} \tag{E-6}$$

Последнее выражение в правой части (E-6) совпадает с функциями спроса по Хиксу, полученными в примере 1.3 напрямую путем решения задачи минимизации расходов потребителя. □

В завершение этого раздела проиллюстрируем четыре соотношения из теорем 1.8 и 1.9. На рис. 1.18(а) потребитель с доходом y достигает максимального уровня полезности u при ценах $\mathbf{p}$, выбирая x_1^* и x_2^*. Соответствующая кривая безразличия функции полезности $u(\mathbf{x})$ дает полезность $u = v(\mathbf{p},\ y)$, и на рис. 1.18(б) точка $(p_1,\ x_1^*)$ лежит на маршалловской кривой спроса на товар 1. Далее рассмотрим задачу минимизации расходов потребителя и предположим, что мы минимизируем расходы, необходимые для достижения полезности u. Очевидно, что тогда самая нижняя кривая постоянных расходов, позволяющая получить полезность u при ценах $\mathbf{p}$, *совпадет* с бюджетным ограничением в задаче максимизации полезности, а минимизирующий расходы объем спроса на товары снова составит x_1^* и x_2^*, в результате чего точка (p_1, x_1^*) на рис. 1.18 (б) будет лежать и на кривой спроса по Хиксу на товар 1.



(а)



(б)

Рис. 1.18. Иллюстрация теорем 1.8 и 1.9

Рассматривая обе задачи одновременно, из того факта, что бюджетное ограничение и линия постоянных расходов пересекаются в одних и тех же точках, легко видеть, что доход y равен минимальному объему расходов, необходимому для получения полезности $v(\mathbf{p},\ y)$, т.е. что $y = e(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y))$. Уровень полезности u является максимально достижимым как при ценах $\mathbf{p}$ и доходе y, в силу чего $u = v(\mathbf{p},\ y)$, так и при ценах $\mathbf{p}$ и доходе, равном минимально необходимым для достижения u расходам, т.е. $u = v(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u))$. Наконец, заметим, что точка (p_1, x_1^*) лежит на всех трех кривых — на кривой хиксовского спроса на товар 1 при ценах $\mathbf{p}$ и уровне полезности u, кривой хиксовского спроса на товар 1 при ценах $\mathbf{p}$ и уровне полезности $v(\mathbf{p},\ y)$, кривой маршалловского спроса на товар 1 при ценах **p** и доходе *y*. Тем самым, $x_1(\mathbf{p},\ y) = x_1^h(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y))$ и $x_1^h(\mathbf{p},\ u) = x_1(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u))$, как мы и предполагали.

1.5. Свойства потребительского спроса

Теория потребительского поведения позволяет строить определенные прогнозы относительного рыночного поведения. Мы увидим, что *если* предпочтения, цели и обстоятельства, в которых потребители принимают решение, таковы, какими мы их смоделировали, *то* поведение рыночного спроса должно обладать некоторыми наблюдаемыми характеристиками. Тогда теорию можно проверить, сопоставив теоретические ограничения на поведение спроса с фактическими. Если в результате теория завоюет определенное доверие, то ее можно применять и далее. Например, теоретические выводы можно использовать при статистической оценке потребительского спроса в качестве *ограничений* на значения оцениваемых параметров. Такое приложение теории помогает повысить статистическую точность полученных оценок. Поэтому и для теоретических, и для эмпирических целей крайне важно «выжать» из нашей модели максимизирующего полезность потребителя все возможные выводы, относящиеся к наблюдаемому поведению спроса. В этом и состоит задача данного раздела.

1.5.1. Относительные цены и реальный доход

Экономисты предпочитают измерять существенные переменные в *реальном*, а не денежном выражении, потому что «деньги — это туман», который только скрывает то, что на самом деле волнует (или должно волновать) людей, а именно: реальные товары. Относительные цены и реальный доход и есть два таких измерителя.

Под ***относительной ценой*** товара i мы понимаем количество единиц некоторого другого товара j, от которых надо отказаться ради приобретения одной единицы i-го товара. Если p_i — денежная цена i-го товара, то она будет измеряться в долларах за единицу товара. Денежная цена j-го товара также будет показывать количество долларов за единицу товара. Относительная цена i-го товара в единицах j-го измеряет число единиц j-го товара, от которых следует отказаться, чтобы приобрести единицу i-го товара. Она определяется отношением цен p_i / p_j, поскольку

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\text{долл.}/\text{единица } i}{\text{долл.}/\text{единица } j} = \frac{\text{долл.}}{\text{единица } i} \cdot \frac{\text{единица } j}{\text{долл.}} = \frac{\text{количество } j}{\text{единица } i}.$$

Под ***реальным доходом*** мы понимаем максимальное количество единиц некоторого товара, которое потребитель *мог бы* приобрести, если бы он потратил на него весь свой денежный доход. Реальный доход должен отражать способность потребителя распоряжаться всеми ресурсами путем измерения его способности распоряжаться одним реальным благом. Если денежный доход потребителя равен y, то отношение y / p_j называется его реальным доходом, выраженным в j-м товаре, и измеряется в единицах j-го товара, потому что

$$\frac{y}{p_i} = \frac{\text{долл.}}{\text{долл.}/\text{единица } j} = \text{количество } j.$$

Простейший вывод, который следует из модели максимизирующего полезность потребителя, заключается в том, что на его поведение влияют только *относительные цены* и *реальный доход*. Он формулируется как утверждение о том, что поведение потребительского спроса демонстрирует *отсутствие денежной иллюзии*. Чтобы убедиться в этом, обратимся к рис. 1.14. Мы видим, что изменение денежного дохода и уровня всех цен в равных пропорциях не влияет на наклон бюджетной линии (относительные цены) и ее пересечения с координатными осями (на реальный доход, выраженный в терминах каждого из товаров), а значит, и на спрос. Математически это означает, что функции спроса положительно однородны нулевой степени по ценам и доходу. Поскольку деньги в нашей модели играют только роль единицы измерения, что-то иное вряд ли было бы возможно.

Для использования в дальнейшем мы объединим эти свойства с тем фактом, что потребитель обычно тратит весь свой доход, и дадим название обоим результатам.

Теорема 1.10. Однородность и сбалансированность бюджета.

При выполнении предположения 1.2 функция спроса потребителя $x_i(\mathbf{p},\ y)$, $i = 1,\ \ldots, n$ *однородна нулевой степени по ценам и доходу и удовлетворяет условию сбалансированности бюджета* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p},\ y) = y$ *для всех* $(\mathbf{p},\ y)$.

Доказательство. Однородность мы, в сущности, уже доказали в первой части теоремы 1.6, где было показано, что косвенная функция полезности однородна нулевой степени, т.е.

$$v(\mathbf{p},\ y) = v(t\mathbf{p},\ ty) \text{ для всех } t > 0.$$

Это эквивалентно утверждению, что

$$u(\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)) = u(\mathbf{x}(t\mathbf{p},\ ty)) \text{ для всех } t > 0.$$

Далее, поскольку бюджетные множества при $(\mathbf{p},\ y)$ и $(t\mathbf{p},\ ty)$ одинаковы, объем спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ является допустимым, если выбран объем спроса $\mathbf{x}(t\mathbf{p},\ ty)$, и наоборот. Поэтому предыдущее равенство и строгая квазивогнутость u означают, что

$$\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y) = \mathbf{x}(t\mathbf{p},\ ty) \text{ для всех } t > 0,$$

или что спрос на каждый товар $x_i(\mathbf{p},\ y)$, $i = 1,\ \ldots, n$, является однородным нулевой степени по ценам и доходу.

Мы уже не раз упоминали о том, что, поскольку $u(\cdot)$ строго возрастает, при объеме спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$ должен расходоваться весь доход потребителя. В противном случае он может приобрести строго больше каждого товара и увеличить свою полезность. Далее мы будем называть это условие ***сбалансированностью бюджета***. ■

Однородность позволяет нам полностью исключить из анализа спроса деньги как единицу измерения. Обычно это делается путем произвольного выбора одного из n товаров в качестве *единицы счета (numéraire)* вместо денег. Если его цена в денежном выражении составляет p_n, то можно положить $t = 1/p_n$ и, используя однородность, заключить, что

$$\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y) = \mathbf{x}(t\mathbf{p},\ ty) = \mathbf{x}\left(\frac{p_1}{p_n},\ \ldots,\ \frac{p_{n-1}}{p_n},\ 1,\ \frac{y}{p_n}\right).$$

Таким образом, спрос на каждый из n товаров зависит только от $n-1$ *относительной цены* и *реального дохода* потребителя.

1.5.2. Эффекты дохода и замещения

В нашей модели поведения потребителя возникает важный вопрос: какова должна быть реакция величины спроса на изменение цены? Обычно мы считаем, что потребитель приобретает больше товара, когда цена снижается, и меньше товара, когда она растет (при прочих равных условиях). На рис. 1.19 показано, что это вовсе не обязательно. На каждой из трех частей рисунка представлен выбор максимизирующего полезность потребителя с монотонными выпуклыми предпочтениями при рыночных ценах. На рис. 1.19(а) снижение цены товара 1 ведет к росту спроса на этот товар, чего мы обычно и ожидаем. Наоборот, на рис. 1.19(б) снижение цены не влияет на количество приобретаемого товара 1, в то время как на рис. 1.19(в) снижение цены ведет к *снижению* спроса на товар 1. Каждый из этих случаев вполне совместим с нашей моделью. Что же тогда утверждает (если что-то утверждает) теория относительно изменения спроса в зависимости от изменения (относительных) цен?

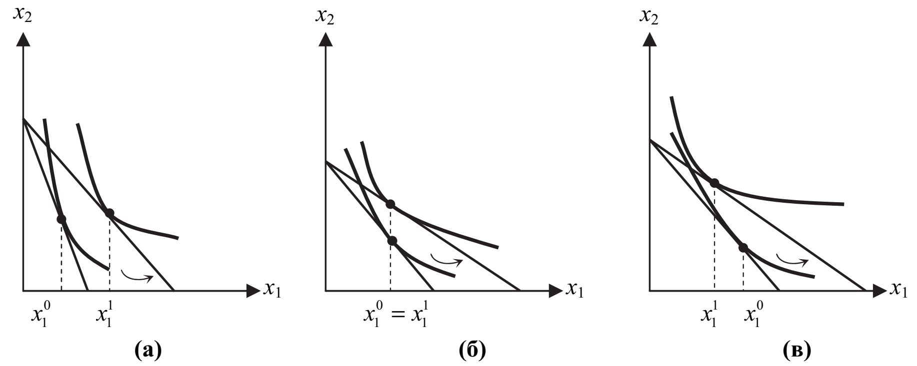


Рис. 1.19. Изменение объема спроса в зависимости от изменения цены

Начнем с обсуждения на интуитивном уровне. Когда цена товара снижается, существует по крайней мере две концептуально различные причины, по которым может произойти изменение величины спроса. Во-первых, этот товар становится относительно дешевле по сравнению с другими. Поскольку все товары являются привлекательными для потребителя, то даже если бы его способность приобретать товары оставалась неизменной, можно было бы ожидать, что относительно более дорогие товары будут замещаться относительно более дешевым. Это ***эффект замещения*** (substitution effect, SE). В то же время при изменении цены способность потребителя приобретать товары, вообще говоря, *не остается* неизменной. Когда цена любого из товаров снижается, эта способность фактически возрастает, позволяя потребителю изменять количество *всех* покупаемых товаров (любым) подходящим способом. Влияние общего увеличения покупательной способности на объем спроса называется ***эффектом дохода*** (income effect, *IE*).

Хотя интуиция подсказывает, что мы можем в некотором смысле разложить общий эффект изменения цены (total effect, *TE*) на эти два концептуально различных компонента, нам потребуется сформулировать эти идеи гораздо строже, чтобы сделать их аналитически полезными. Чтобы формализовать интуитивные понятия эффектов дохода и замещения, можно воспользоваться различными способами. Мы будем следовать способу, предложенному Хиксом [Hicks, 1939].

Декомпозиция общего эффекта ***изменения цены по Хиксу*** начинается с наблюдения, что потребитель достигает некоторого уровня полезности при исходных ценах (до каких-либо изменений). Формальное изложение интуитивного понятия эффекта замещения таково: эффект замещения представляет собой такое (гипотетическое) изменение потребления, которое *произошло бы*, если бы относительные цены изменились, но максимально достижимый потребителем уровень полезности остался тем же, что и до изменения цен. Эффект дохода определяется как то, что остается от общего эффекта после вычитания эффекта замещения. Обратите внимание, что в силу определения эффекта дохода как остаточного общий эффект всегда в точности равен сумме эффекта замещения и эффекта дохода. На первый взгляд такой подход может показаться странным, но рис. 1.20 должен убедить вас по крайней мере в том, что это, с одной стороны, нетривиальное аналитическое построение и что, с другой стороны, оно в достаточной мере соответствует интуитивным представлениям об эффектах дохода и замещения.

Посмотрим сначала на рис. 1.20(a) и предположим, что потребитель изначально сталкивается с ценами p_1^0 и p_2^0 и имеет доход y. Он приобретает товары в объеме x_1^0 и x_2^0 и достигает уровня полезности u^0. Предположим, что цена товара 1 падает до величины $p_1^1 < p_1^0$ и что общий эффект от этого заключается в увеличении потребления товара 1 до x_1^1 и снижении потребления товара 2 до x_2^1. Чтобы применить декомпозицию по Хиксу, нам необходимо сначала провести мысленный эксперимент, при котором цена товара 1 снижается до своего нового уровня p_1^1, а *потребителю предоставляется возможность осуществлять выбор на прежней кривой безразличия* u^0. Это выглядит так, как будто мы поставили потребителя перед новыми относительными ценами, но сократили его доход (соответствующая бюджетная линия показана пунктиром) и предложили максимизировать полезность при этом ограничении. В этой ситуации потребитель *увеличит* потребление товара 1, который стал относительно дешевле, с x_1^0 до x_1^s и *сократит* потребление товара 2, который стал относительно дороже, с x_2^0 до x_2^s. Эти гипотетические изменения потребления представляют собой эффекты замещения по Хиксу для товаров 1 и 2, и мы считаем, что они связаны исключительно с изменением относительных цен при неизменном благосостоянии потребителя.

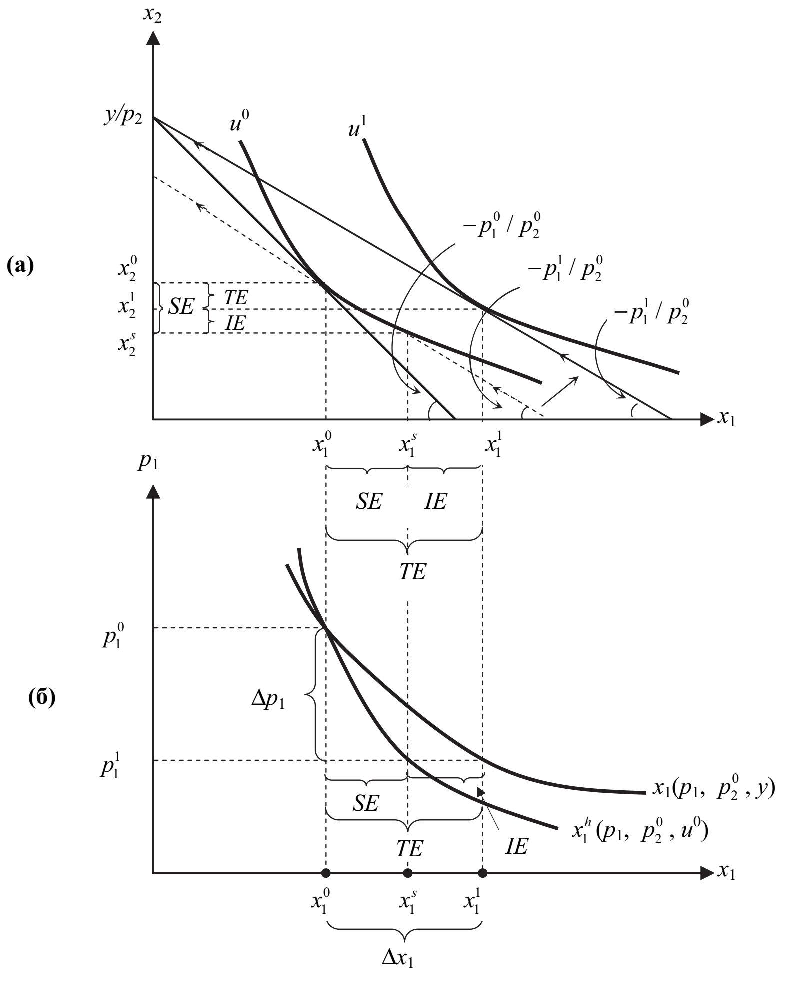


Рис. 1.20. Декомпозиция по Хиксу при изменении цены

Теперь посмотрим, что остается от общего эффекта. После гипотетических изменений от x_1^0 и x_2^0 до x_1^s и x_2^s нужно объяснить изменения от x_1^s и x_2^s до x_1^1 и x_2^1. Заметим, что это как раз те изменения, которые произошли бы, если бы при новых ценах и первоначальном уровне полезности u^0 *реальный доход потребителя увеличился*, тем самым сдвинув гипотетическое бюджетное ограничение, обозначенное пунктирной линией, до уровня окончательной бюджетной линии, отражающей изменение цены и касающейся кривой безразличия u^1. Именно в этом смысле эффект дохода по Хиксу представляет изменения в потребление как следствие исключительно изменения в цене.

Теперь посмотрим на рис. 1.20(б), где игнорируется все происходящее с товаром 2 и фокусируется внимание только на товаре 1. Очевидно, что точки (p_1^0, x_1^0) и (p_1^1, x_1^1) лежат на маршалловской кривой спроса на товар 1. Аналогично точки (p_1^0, x_1^0) и (p_1^1, x_1^s) лежат на хиксовской кривой спроса на товар 1 при исходном уровне полезности u^0. Как видно, хиксовская кривая спроса на товар *в точности* отражает эффект замещения *по Хиксу* от изменения цены на этот товар. (Понятно ли это?) Маршалловская кривая спроса отражает общий эффект изменения цены на товар. Эти две кривые вследствие наличия эффекта дохода по Хиксу отклоняются друг от друга на расстояние, равное величине этого эффекта.

Декомпозиция по Хиксу позволяет строгим аналитическим способом разделить две различные силы, изменяющие спрос вследствие изменения цены. Эту же идею можно выразить гораздо точнее, в более общей и удобной форме. Связь между общим эффектом, эффектом замещения и эффектом дохода задается ***уравнением Слуцкого***. Его иногда называют «фундаментальным уравнением теории спроса», поэтому дальнейшее изложение заслуживает тщательного осмысления.

До конца этой главы мы будем опираться на предположение 1.2 и в случае необходимости предполагать дифференцируемость соответствующих функций.

Теорема 1.11. Уравнение Слуцкого.

Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$ *— маршалловский спрос потребителя. Пусть* u^* *— уровень полезности, который достигается потребителем при ценах* $\mathbf{p}$ *и доходе* y. *Тогда*

$$\underbrace{\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_j}}_{TE} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u^*)}{\partial p_j}}_{SE} \underbrace{- x_j(\mathbf{p},\ y)\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial y}}_{IE},\ i,\ j = 1,\ \ldots, n.$$

Доказательство. Доказательство этой замечательной теоремы довольно простое, но требует определенного внимания. Для начала вспомним одно из соотношений между функциями спроса по Маршаллу и по Хиксу. Из теоремы 1.9 нам известно, что

$$x_i^h(\mathbf{p},\ u^*) = x_i(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u^*))$$

для любых цен и уровня полезности u^*. Поскольку это верно для всех $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, обе части можно продифференцировать по p_j, причем равенство сохранится. Спрос по Хиксу в левой части равенства дифференцировать легко, поскольку он зависит от цен только напрямую. Спрос по Маршаллу зависит от цен напрямую через первый аргумент и косвенно через функцию расходов во втором аргументе, поэтому в правой части равенства потребуется применить правило дифференцирования сложной функции, из которого мы получаем

$$\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u^*)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u^*))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ e(\mathbf{p},\ u^*))}{\partial y}\frac{\partial e(\mathbf{p},\ u^*)}{\partial p_j}. \tag{P-1}$$

Если теперь внимательно взглянуть на (P-1) и вспомнить, как была определена величина u^*, то можно сделать несколько важных замен. По предположению, u^* — это уровень полезности, который достигается потребителем при ценах $\mathbf{p}$ и доходе y, т.е. $u^* = v(\mathbf{p},\ y)$. Поэтому минимальные расходы при ценах $\mathbf{p}$ и полезности u^* будут равны минимальным расходам при ценах $\mathbf{p}$ и полезности $v(\mathbf{p},\ y)$. Однако из теоремы 1.8 мы знаем, что минимальные расходы при ценах $\mathbf{p}$ и максимальной полезности, достижимой при ценах $\mathbf{p}$ и доходе y, равны доходу y. Таким образом, мы имеем

$$e(\mathbf{p},\ u^*) = e(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y)) = y. \tag{P-2}$$

Кроме того, теорема 1.7 гласит, что частная производная функции расходов в (P.1) по p_j равна хиксовскому спросу на j-й товар при уровне полезности u^*. Поскольку $u^* = v(\mathbf{p},\ y)$, она равна хиксовскому спросу на j-й товар при уровне полезности $v(\mathbf{p},\ y)$, или

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\ u^*)}{\partial p_j} = x_j^h(\mathbf{p},\ u^*) = x_j^h(\mathbf{p},\ v(\mathbf{p},\ y)).$$

Но посмотрим на крайний правый член в этом равенстве. Из теоремы 1.9 мы знаем, что хиксовский спрос при $\mathbf{p}$ и максимальной полезности, достижимой при $\mathbf{p}$ и y, в свою очередь, равен маршалловскому спросу при $\mathbf{p}$ и y! Отсюда мы имеем

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\ u^*)}{\partial p_j} = x_j(\mathbf{p},\ y). \tag{P-3}$$

(Здесь будьте внимательны: мы показали, что частная производная функции расходов по цене в (P-1) равна маршалловскому спросу на j-й, а не на i-й товар.)

Чтобы завершить доказательство, подставим (P-2) и (P-3) в (P-1):

$$\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u^*)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial y} x_j(\mathbf{p},\ y).$$

После небольшого преобразования получаем требуемое:

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u^*)}{\partial p_j} - x_j(\mathbf{p},\ y)\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial y},\quad i,\ j = 1,\ \ldots, n. \qquad \blacksquare$$

Уравнения Слуцкого дают строгие аналитические выражения для эффектов дохода и замещения. Они также создают схему, подробно описывающую, как комбинировать эти эффекты, чтобы объяснить общий эффект от любого изменения цен. Но сами по себе уравнения не отвечают на поставленные нами вопросы. Может показаться, что они только мешают делать выводы из нашей теории, которые относятся к *наблюдаемому* поведению. В конце концов все, что мы сделали на данный момент, сводится к тому, что мы разложили наблюдаемый общий эффект на наблюдаемый эффект дохода и *ненаблюдаемый* эффект замещения. Вот что уравнение Слуцкого, к примеру, дает нам в особом случае изменения цены самого товара i. Из теоремы 1.11 мы имеем

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u^*)}{\partial p_i} - x_i(\mathbf{p},\ y)\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial y}. \qquad (1\text{-}20)$$

Левая часть этого равенства представляет собой наклон маршалловской кривой спроса на i-й товар — реакцию объема спроса на изменение цены товара, т.е. как раз то, что мы хотим объяснить. Для этого нам, очевидно, требуется знать что-то о первом члене выражения в правой части. Это наклон хиксовской кривой спроса, а она не наблюдаема напрямую. Что же мы можем узнать о хиксовских кривых спроса, если мы не можем их даже наблюдать?

Поразительно, но наша теория способна немало сообщить нам о спросе по Хиксу, а значит, и о коэффициентах замещения независимо от того, наблюдаемы они или нет. Все, что нам известно о коэффициентах замещения, можно с помощью уравнений Слуцкого преобразовать в информацию о наблюдаемом маршалловском спросе. Именно так мы и будем действовать. Начнем с формулировки следующего результата об эффекте изменения цены.

Теорема 1.12. Отрицательные собственные коэффициенты замещения.

Пусть $x_i^h(\mathbf{p},\ u)$ *— спрос по Хиксу на* i *-й товар. Тогда*

$$\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_i} \le 0\,,\ i = 1,\ \ldots, n\,.$$

Доказательство. Эта теорема утверждает, что хиксовские кривые спроса должны всегда быть такими, как они изображены на рис. 1.16 и др., т.е. должны иметь отрицательный (неположительный) наклон по своей цене. Доказательство несложно.

По свойству производной функции расходов (теорема 1.7, свойство 7)) при любых $\mathbf{p}$ и u

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_i} = x_i^h(\mathbf{p},\ u)\,.$$

Повторно дифференцируя по p_i, получаем

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_i^2} = \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_i}\,,\ i = 1,\ \ldots, n\,.$$

Согласно свойству 6) теоремы 1.7 функция расходов вогнута по $\mathbf{p}$. Тогда по теореме A2.5 все ее частные производные второго порядка неположительны, что и доказывает теорему. ■

Теперь у нас есть все, что нужно для того, чтобы сформулировать современную версию так называемого ***закона спроса***. Экономисты-классики, такие, как Эджворт и Маршалл, предполагали, что «полезность» можно измерить, и верили в принцип убывающей предельной полезности. Поэтому классический вариант закона спроса звучит очень категорично: «Если цена снижается, объем спроса возрастает». Это в целом согласовалось с наблюдениями о реальном поведении людей, но оставались некоторые неприятные исключения. Самым известным из них был знаменитый ***парадокс Гиффена***. Оказывалось, что для некоторых, хотя и немногочисленных, товаров за снижением цены следовало *снижение* объема спроса. Это противоречило принятой доктрине, и классическая теория не могла объяснить этого.

Современная теория накладывает меньше ограничений на предпочтения, чем классическая. В этом смысле она менее жесткая и применима гораздо шире. Более того, она даже способна разрешить парадокс Гиффена. Взгляните на рис. 1.19(в) и обратите внимание, что величина спроса на первое благо x_1 действительно снижается при снижении цены. Ничто не запрещает такого поведения, поэтому в современном контексте в парадоксе Гиффена нет ничего парадоксального. Но за бóльшую общность приходится расплачиваться: современный закон спроса менее прозрачен, чем его классический предшественник.

В формулировке закона мы будем пользоваться знакомой терминологией. Благо называется ***нормальным***, если его потребление возрастает с ростом дохода при неизменных ценах. Благо называется ***инфериорным***, если его потребление снижается с ростом дохода при неизменных ценах.

Теорема 1.13. Закон спроса.

Снижение цены нормального блага приводит к увеличению объема спроса на него. Если снижение цены длага приводит к снижению объема спроса на него, то это инфериорное благо.

Доказательство. Утверждение легко следует из теоремы 1.12, если воспользоваться теоремой 1.11. Мы оставляем его доказательство в качестве упражнения. ■

На самом деле мы знаем о хиксовских коэффициентах замещения гораздо больше, чем говорится в теореме 1.12, а о маршалловском спросе — гораздо больше, чем говорится в теореме 1.13. Чтобы продвинуться далее по сравнению с простыми утверждениями, сделанными на данный момент, нам придется немного глубже изучить систему коэффициентов замещения. Прежде всего мы докажем, что «перекрестные коэффициенты замещения» являются *симметричными*.

Теорема 1.14. Симметричность коэффициентов замещения.

Пусть $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$ *— функция спроса по Хиксу и пусть функция* $e(\cdot)$ *дважды непрерывно дифференцируема. Тогда*

$$\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_i},\quad i,\ j = 1,\ \ldots, n.$$

Доказательство. Сразу понять значение этого результата довольно непросто. Примечательно, однако, что можно показать, что условие симметричности тесно связано с предположением о транзитивности отношения предпочтения потребителя! Мы не будем здесь углубляться в эту связь, но затронем ее в дальнейшем.

При доказательстве теоремы 1.12 мы заметили, что первые частные производные функции расходов по цене дают нам хиксовские функции спроса, поэтому из вторых частных производных функции расходов по цене мы получим *первые* частные производные хиксовских функций спроса по этой цене:

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial}{\partial p_j}(x_i^h(\mathbf{p},\ u)),$$

или

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_j} \tag{P-1}$$

для всех i и j. По теореме Юнга порядок дифференцирования функции расходов не имеет значения, поэтому

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_j \partial p_i}.$$

Вместе с (Р-1) это приводит нас к выводу о том, что

$$\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_i},\ i, j = 1,\ \ldots, n. \qquad \blacksquare$$

Если мы представим, что все n^2 коэффициентов замещения в системе функций потребительского спроса помещены в матрицу размера $n \times n$, то собственные коэффициенты замещения будут находиться на ее диагонали, а перекрестные коэффициенты замещения — вне диагонали. Теоремы 1.12 и 1.14 дают нам довольно полное представление о том, как будет выглядеть эта матрица. Согласно теореме 1.12, все элементы на главной диагонали будут неположительными, а по теореме 1.14 матрица будет симметричной. О матрице коэффициентов замещения можно на самом деле сказать даже больше: она должна быть также *отрицательно полуопределенной*.

Теорема 1.15. Отрицательная полуопределенность матрицы замещения.

Пусть $\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\ u)$ *— функция спроса по Хиксу и пусть* ***матрица замещения***

$$\sigma(\mathbf{p},\ u) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

содержит все хиксовские коэффициенты замещения. Тогда матрица $\sigma(\mathbf{p},\ u)$ *отрицательно полуопределена.*

Доказательство. Доказательство очевидно, если из доказательства предыдущей теоремы мы вспомним, что каждый элемент матрицы равен одной из вторых частных производных функции расходов по цене. В частности, мы видели, что $\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u)\big/\partial p_j = \partial^2 e(\mathbf{p},\ u)\big/\partial p_j \partial p_i$ для всех i и j, поэтому в матричном виде получаем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n^h(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_n \partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_1 \partial p_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 e(\mathbf{p},\ u)}{\partial p_n^2} \end{pmatrix}.$$

Матрица в правой части представляет собой ***матрицу Гессе*** функции расходов. По теореме 1.7 функция расходов вогнута по ценам, а по теореме А2.4 матрица Гессе вогнутой функции отрицательно полуопределена. Поскольку две матрицы совпадают, матрица замещения будет отрицательно полуопределена. ■

Потратив так много времени на исследование свойств ненаблюдаемых функций спроса по Хиксу, мы наконец можем применить полученные знания для того, чтобы сделать какие-либо конкретные выводы о наблюдаемом спросе потребителя. Способ, который можно использовать для этой цели, уже рассматривался при обсуждении «закона спроса». Там мы задавались вопросом о том, что же модель поведения потребителя сообщает нам о ненаблюдаемых собственных эффектах замещения, а затем с помощью уравнения Слуцкого искали связь между производными наблюдаемых маршалловских функций спроса на некоторый товар по цене этого товара и доходу. Учитывая то, чтó мы теперь знаем обо всей системе коэффициентов замещения, нам необязательно ограничиваться утверждениями о влиянии на спрос изменений в доходе и цене этого товара. Мы можем использовать *матрицу* замещения для того, чтобы делать полноценные выводы о влиянии *всех* цен и дохода на наблюдаемые маршалловские функции спроса на все товары.

Теорема 1.16. Симметричность и отрицательная полуопределенность матрицы Слуцкого.

Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p},\ y)$ *— маршалловская функция спроса. Определим* ij*-й коэффициент Слуцкого как*

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_j} + x_j(\mathbf{p},\ y)\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial y}$$

*и построим **матрицу Слуцкого** размерности* $n \times n$*:*

$$\mathbf{s}(\mathbf{p},\ y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_1}+x_1(\mathbf{p},y)\dfrac{\partial x_1(\mathbf{p},\ y)}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial x_1(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_n}+x_n(\mathbf{p},y)\dfrac{\partial x_1(\mathbf{p},\ y)}{\partial y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_1}+x_1(\mathbf{p},\ y)\dfrac{\partial x_n(\mathbf{p},\ y)}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial x_n(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_n}+x_n(\mathbf{p},y)\dfrac{\partial x_n(\mathbf{p},\ y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Тогда матрица $\mathbf{s}(\mathbf{p},\ y)$ *симметрична и отрицательно полуопределена.*

Доказательство. Доказательство очень простое. Пусть u^* — максимально достижимый уровень полезности при ценах $\mathbf{p}$ и доходе y, так что $u^* = v(\mathbf{p},\ y)$. Из уравнения Слуцкого в теореме 1.11 найдем ij-й коэффициент замещения:

$$\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p},\ u^*)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial p_j}+x_j(\mathbf{p},\ y)\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\ y)}{\partial y}.$$

Если мы теперь построим матрицу $\mathbf{s}(\mathbf{p},\ y)$, становится ясно, что каждый ее элемент в точности равен соответствующему элементу матрицы замещения по Хиксу $\sigma(\mathbf{p},\ u^*)$. По теореме 1.14 матрица замещения симметрична для всех u, а по теореме 1.15 она отрицательно полуопределена для всех u; поэтому в u^* она будет и симметрична, и отрицательно полуопределена. Поскольку две матрицы совпадают, матрица Слуцкого $\mathbf{s}(\mathbf{p},\ y)$ тоже будет симметрична и отрицательно полуопределена. ■

Теоремы 1.10 и 1.16 можно использовать в качестве исходной точки для проверки или эмпирического приложения разработанной теории. Условия сбалансированности бюджета и однородности потребительского спроса, а также симметричности и отрицательной полуопределенности соответствующей матрицы Слуцкого дают набор *ограничений* на допустимые значения параметров любой эмпирически оцененной системы маршалловских функций спроса, если предполагается, что эта система построена для потребителя, который максимизирует свою полезность и принимает цены как данные. Существуют ли *другие* вытекающие из теории и поддающиеся тестированию ограничения? Этим вопросом мы займемся в следующей главе, но сначала рассмотрим некоторые важные соотношения между эластичностями.

Джейли, Дж. А. Микроэкономика: продвинутый уровень [Текст] : учеб-
Д40 ник / Джеффри А. Джейли, Филип Дж. Рени ; пер. с англ. ; под науч. ред. В. П. Бусыгина, М. И. Левина, Е. В. Покатович ; Гос. ун-т — Высшая школа экономики. — М.: Изд. дом Гос. ун-та — Высшей школы экономики, 2011. — 733, [3] с. — Перевод изд.: Advanced Microeconomic Theory / Geoffrey A. Jehle, Philip J. Reny. Second edition. The Addison-Wesley, 2001. — (The Addison-Wesley Series in Economics). — 2000 экз. — ISBN 978-5-7598-0362-1 (в пер.)

Учебник двух выдающихся экономистов и высокопрофессиональных преподавателей из США — профессора Джеффри А. Джейли (Колледж Вассар, Покипси) и профессора Филипа Дж. Рени (Университет Чикаго) — превосходное пособие по изучению микроэкономического анализа. В нем рассматриваются теория потребителя и производителя, частичное и общее равновесие, общественное благосостояние, теория игр и экономика информации. В математическом приложении подробно изложены теория множеств, элементы математического анализа и теория оптимизации, являющиеся неотъемлемыми частями современной микроэкономики. Продуманный отбор материала — ничего лишнего, но все необходимое, точность формулировок, доказательность выводов, плюс необходимый инструментарий — таков стиль этой книги. Учебник содержит не только теорию, но и примеры, а также многочисленные упражнения, к которым приведены указания и ответы, что превращает его еще и в отличный обучающий задачник.

Для студентов старших курсов университетов и аналитиков-экономистов, а также всех, кто хотел бы знать современную микроэкономическую теорию, ее методы и результаты применения.

УДК 330.101.542
ББК 65.012.1

Учебное издание

Джеффри А. Джейли, Филип Дж. Рени

Микроэкономика:
продвинутый уровень

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор *Е.А. Рязанцева*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *О.А. Христенко*
Корректор *Н.В. Андрианова*

Подписано в печать 14.12.2010. Формат $70 \times 100^1/_{16}$
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 59,8. Уч.-изд. л. 49,9
Тираж 2000 экз. Изд. № 551

Государственный университет — Высшая школа экономики
125319, Москва, Кочновский проезд, д. 3
Тел./факс: (495) 772-95-71

ISBN 978-5-7598-0362-1

9 785759 803621